TECHE UDINE

# MANOSCRITTI

# FONDO PRINCIPALE

## Manoscritto n. P_MSS_1028_I

*Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.*

Collocazione:

**Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine**

*https://www.techeudine.it/fondo-principale*

*https://www.sbhu.it/*

A I C [illegible]

SA[illegible]SOR

IN CONTRAB

OE[illegible]CON[illegible]

BLAST

I

1028

BIBLIOTECA COMUNALE
VINCENZO JOPPI
UDINE
N. 1028 I

Saggio
sopra le leggi
del
Contrappunto
dal. Conte
Giordano Riccati.
Nobile Trivigiano

stampato in Castelfranco. Per Giulio Trento
1762

F. DI TOPPO

Al Nobile Signor
Co. Trovavante degli
Azzoni Avogari
Giordano Riccati.

Mi comanda ella Sig.ra Co. Trovavante riveritissimo di ristrignere in un sugoso Compendio la mia Opera musica, il cui titolo <u>Le leggi del Contrappunto dedotte dai fenomeni, e confermate col raziocinio</u>; ed io ai cenni di un Cavaliere, che tanto stimo ed amo, non posso non obbedir prontamente. Richiami a memoria, che sino dall'anno 1742. mi eccitò a dettare su questo argomento una breve Istruzione, ed avendo intrapreso il lavoro, mi crebbe talmente la materia fra le mani, che ne provenne l'Opera mentovata, la quale dovrebbe essere ormai ridotta al termine, se dagli studj fisico-matematici, e principalmente dall'Acustica, e dall'ordinare per la stampa l'Opere del Co. Jacopo mio Padre non fosse stata lungamente, e frequentemente interrotta. Se dunque l'Opera mia è debitrice a Lei della sua origine, Ella ha un tale diritto sopra la stessa, che non può negare di presentarsela davanti anche spogliata delle sue gale, e in succinto. L'estratto di un Libro si potrebbe congruamente paragonare alla vista rimota di un grande obbietto

obbietto, la quale quanto è più chiara in riguardo al tutto, altrettanto riesce più oscura e confusa relativamente alle piccole parti. Quindi Ella deve rimirare l'estratto, che le presento, nel conveniente punto di veduta, contentandosi di formare distinta idea dell'Opera intera, e tollerando che le ragioni delle leggi da me stabilite siano piuttosto accennate che poste in chiaro. Inoltre siccome nell'oggetto lontano si nascondono onninamente all'occhio le più minute parti; così in un Compendio egli è di uopo tralasciare le cose di minore importanza, le quali se Ella avesse piacere di osservare, si renderebbe necessario, che passando dal sito rimoto al vicino, non nell'estratto, ma nell'Opera compiuta le ricercasse.

# Saggio sopra le leggi del Contrappunto

## Libro primo.

*Delle consonanze.*

Le mie lunghe meditazioni intorno al Contrappunto le ho distribuite in quattro Libri, e cominciando dal primo, dico che avendo la Musica per fine principale il diletto, fu di uopo prima di ogni altra cosa rivolger l'occhio alle consonanze, le quali sole senza mescolanza di quel gusto piccante, ch'è proprio delle dissonanze, recan piacere all'udito. L'esperienza ci ha resa nota le consonanze, cioè a dire, oltre l'Unisono, ch'è un'eguaglianza di suoni, l'Ottava, la Quinta, la Quarta, le due Terze, e le due Seste, l'una maggiore, e l'altra minore, con tutte le replicazioni nascenti dall'aggiungere ai mentovati intervalli una o più Ottave. O si esprimano i suoni per il numero delle vibrazioni fatte da più corpi sonori in tempo pari, o per le durate di esse vibrazioni (io soglio servirmi della prima maniera) si verifica sempre, che nelle ragioni consonanti ridotte a numeri fra loro primi non abbia luogo numero impari maggiore del cinque, e che per conseguenza siano fornite di grande semplicità, e proporzionatamente ad essa dall'orecchio comprese. Queste consonanze

*Le ragioni consonanti ridotte a' numeri fra loro primi non contengono numero impari maggiore del cinque.*

non

non appartengono tutte al medesimo grado; imperciocchè l'Ottava, e le sue replicazioni hanno tale attenenza coll'Unisono, che meritano il titolo di equisonanze. La Quinta, e la Quarta, e le loro replicazioni si contano tra le consonanze perfette: e finalmente le due Terze, e le due Seste coll'aggiunta anche d'una, o più Ottave sogliono chiamarsi consonanze imperfette. Scendendo a considerare le ragioni proprie dei tre gradi di consonanze, trovo che in quelle al primo grado spettanti 1 : 1 Unisono, 1 : 2 Ottava, 1 : 4 doppia Ottava &c.; non c'entra altro numero impari, salvo che l'unità. Quelle del secondo 1 : 3 Duodecima, o Quinta sopra l'Ottava, 2 : 3 Quinta, 1 : 6 Quinta sopra l'Ottava duplicata &c., 3 : 4 Quarta, 3 : 8 Undecima, o Quarta sopra l'Ottava &c.; ammettono pure il numero tre, ed il numero cinque quelle del terzo 1 : 5 Terza maggiore sopra la doppia Ottava, 2 : 5 Terza maggiore sopra l'Ottava, 4 : 5 Terza maggiore &c., 5 : 8 Sesta minore &c., 3 : 5 Sesta maggiore &c., 5 : 6 Terza minore &c. L'addotta riflessione mostra chiaramente il perchè in tre diverse classi si distinguano le consonanze. Non debbo tralasciar di notare, che partecipando molto dell'Unisono l'Ottava semplice, e moltiplicata

Le consonanze si dividono in equisonanze, consonanze perfette, ed imperfette.

Le ragioni, che differiscono per una, o più Ottave, sono equivalenti.

triplicata, quelle ragioni, che dif=
feriscono per una o più Ottava,
fanno quasi figura di una stessa
ragione, e l'una all'altra equi=
vale.

Sino dagli antichi Greci è
stato a noi tramandato il tanto
celebre Sistema Diatonico, che al
canto naturale di tutte le nazioni
ha sempre mai dato regola. Ma
qual è la vera origine di tal
sistema? La Musica è una
mistura di armonia, e di melo=
dia: dichiarandomi che per
armonia intendo più suoni, che
unitamente si sentano; e per
melodia più suoni, l'uno de'
quali all'altro succedan. Questa
spiegazione ci suggerisce una
definizione ancora più chiara
della Musica, la quale altro non
è se non una successione di armo=
nici accompagnamenti, che o s'
odono effettivamente, o almeno
si sottintendono.

*Definizione della Musica.*

Due soli sono i consonanti
accompagnamenti di Terza mag=
giore, Quinta, e Ottava; di Ter=
za minore, Quinta, e Ottava, che
appaghino compiutamente l'orec=
chio, siccome quelli, che non com=
prendendo ragione alcuna, che
ridotta a numeri fra loro primi
ammetta numero impari mag=
giore del cinque, condizione ne=
cessaria in qualunque accordo con=
sonante, riferiscono in oltre al
Basso, col quale si fanno i princi=
pali paragoni, il migliore aggre=
gato di consonanze. Gli altri

*Degli accordi consonanti, due fondamentali, e quattro derivati*

*Ragione, per cui i fondamentali, e non i derivati appaghino compiutamente l'orecchio.*

quattro

quattro accompagnamenti consonan=
ti di Terza e Sesta ambo minori,
di Terza e Sesta ambo maggiori,
di Quarta e Sesta maggiore, di
Quarta e Sesta minore non lascia=
no del tutto contento l'udito; per=
chè la più perfetta unione di con=
sonanze corrisponde ad una par=
te, che non è il Basso. Assegnato
il titolo di fondamentali, e di per=
fetti ai due accordi di Terza e
Quinta, compete quello di derivati
ai rimanenti quattro; due di
Terza e Sesta, ed altrettanti di Quar=
ta e Sesta, a cagione che, levato
il vero suono fondamentale, rica=
vono siccome Basso o la Terza, o
la Quinta dei due accompagna=
menti perfetti. La mancanza
del vero Basso con tutta chiarezza
si manifesta negli accordi di Quar=
ta e Sesta non molto atti ad esser
posti con soverchia frequenza nei
Bassi continui, accorgendosi aper=
tamente l'orecchio, che se il
suono acuto della Quarta conso=
nanza perfetta si trasportasse
all'Ottava bassa, l'accompagna=
mento si trasformerebbe di deri=
vato in fondamentale. In riguar=
do agli accompagnamenti di Terza
e Sesta, tutte e due consonanze
imperfette, non è così distinto
il giudizio del senso. I due ac=
compagnamenti fondamentali
deggiono considerarsi come una
compiuta armonica consonante u=
nità, essendo talmente ordinati,
che se trasporto all'Ottava alta
o la sola base, o la base e la Terza,
si cangiano in derivati; se loro

Per qual causa la mancanza del vero Basso si manifesti con tutta chiarezza negli accordi di Quarta e Sesta.

I due accordi fondamentali deggiono considerarsi come una compiuta armonica consonante unità.

loro

loro o l'Ottava, o la Quinta, o la Terza, li privo di un genere di consonanze; e se aggiungo loro qualunque nuovo suono non equisono ai già introdotti, li trasformo in dissonanti, insinuandosi in essi qualche ragione, in cui c'entra un numero impari maggiore del cinque. Ho affermato che l'accompagnamento per Terza minore appaga compiutamente l'orecchio, ed or mi dichiaro che ciò dee intendersi non assolutamente, ma solo in relazione ai suoi derivati: essendo indubitato che al detto accordo va preferito quello per Terza maggiore; perchè questa consonanza è alquanto più semplice della Terza minore. Avverto che nel far menzione dei consonanti accompagnamenti, sotto i nomi delle consonanze senz'aggiunta di Ottava ho inteso di comprendere anche le loro replicazioni; non variandosi essenzialmente un'accordo, quando in esso si colloca un intervallo equivalente in cambio dell'altro. Non può frattanto negarsi, che nelle sette specie di consonanze l'ottime proporzioni sien le seguenti 1:2, 1:3, 3:4, 1:5, 5:4, 3:5, 5:6, e che l'ottima forma dell'accordo per Terza maggiore sia 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Origine dei due Modi maggiore, e minore.

Si concepisca ora adattato al suono, base della cantilena, l'uno, o l'altro fondamentale accompagnamento, e volendo cangiare accordo, ella è cosa evi=

dente

dente, che i migliori passi, ch'io posso movere, sono o lo ascendere, o il discendere per una Quinta, la qual discesa equivale allo ascendimento per una Quarta. Dalla successione di tre accompagnamenti o per Terza maggiore, o per Terza minore; lo uno fondato sopra il suono principale scelto ad arbitrio, e gli altri due sopra due suoni, che al principale si riferiscano in Quinta, e in Quarta, nascono i due Modi per Terza maggiore, e per Terza minore, che sono contenuti nel sistema Diatonico, e sopra de' quali si fondano al giorni di oggi tutte le musiche composizioni. Una tale origine dei due Modi io la comunicai lo anno 1735. al R. Francescantonio Vallotti eccellente Maestro di cappella nel tempio di S. Antonio di Padova, il quale avendomi partecipata la serie degli accompagnamenti, che egli assegnava alle corde componenti la Scala del Modo maggiore, mi diede occasione di avanzare lo utilissimo passo. La stessa verità ha parimente scoperta il chiarissimo M. Rameau nella dotta sua Opera Generation Harmonique pubblicata in Parigi lo anno 1737.

I mentovati accordi, tre per Terza maggiore, ed altrettanti per Terza minore determinano le corde tutte dei Modi maggiore, e minore, e gli accompagnamenti loro convenienti. Da una corda all'altra vicina si fa transito o per una Seconda maggiore, che in tre incontri abbraccia la proporzione

che determina tutte le loro corde; e gli accordi ad esse convenienti.

proporzione

proporzione 8 : 9 chiamata Tuono maggiore, ed in due la proporzion 9 : 10 chiamata Tuono minore, ovvero per una Seconda minore 15 : 16, le quali ammettendo nelle loro ragioni i numeri impari nove, quindici maggiori del cinque, si debbono collocare tra le dissonanze, mentre armonicamente si adoprino. Ne' nostri due Modi dilettano le dette Seconde usate melodiosamente, non mica considerate in se stesse, ma siccome mezzi per passare da consonanza a consonanza, cioè a dire da suono a suono proprj degli accompagnamenti, che producono il Modo. L'importante riflessione or ora fatta verrà pienamente confermata dalla seguente. Si osservi adunque, che se le stesse Seconde si condurranno da una consonanza ad una dissonanza, riusciranno spesso talmente disgustose, che il porle in opera si riputerà errore inescusabile di Contrappunto: tanto è vero, che non in se stesse, ma relativamente al termine donde partono, ed a quello dove si trasferiscono deggionsi considerare.

Quando le Seconde sien grate nella melodia.

Conciossiachè gli accompagnamenti fondati sulle corde prima e quinta, prima e quarta hanno un suono comune, addiviene che quando si passa dall'uno all'altro dei detti due accordi, conforme principalmente richiede l'origine dei Modi maggiore, e minore, le sopramentovate Seconde sono differenze di due consonanze, che al suono comune si

Di quali coppie di consonanze sien differenza le predette Seconde.

riferiscono

riferiscono: circostanza, che ne facilita molto l'intonazione. Le consonanze perfette Quarta e Quinta differiscono per la seconda maggiore 8:9. Di due consonanze una perfetta, e l'altra imperfetta sono differenze la Seconda maggiore 9:10, e la minore 15:16, quella della Quinta e della Sesta maggiore, della Terza minore e della Quarta, questa della Terza maggiore e della Quarta, della Quinta e della Sesta minore.

Il Semituono minore è bandito dall'armonia, ed ammesso nella melodia, ma non nella più maestosa

Il Semituono minore 24:25 è la sola differenza fra due coppie di consonanze imperfette Terza minore e Terza maggiore, Sesta minore e Sesta maggiore, che con ragione non ha luogo fra i due Modi maggiore, e minore. In fatti il Semituono minore è talmente picciolo, che merita un bando assoluto dall'armonia, giudicandolo l'orecchio uno scordato Unisono. Lo ammette la melodia, ma non la più seria; perchè contiene una certa smanceria, che non è punto confacente alla maestà del Sistema Diatonico.

Due Modi maggiore, e minore relativi

Ho detto che il Sistema Diatonico contiene i due Modi maggiore, e minore, ed or aggiungo che questo ha per fondamento la sesta corda di quello. I due Modi maggiore, e minore, le cui basi si corrispondono nell'assegnata ragione, si chiamano relativi; perchè hanno comune la Scala. Ed in fatti nel valore di sei suoni perfettamente accordandosi, differiscono in un solo, ch'è il secondo del Modo maggiore, il quarto del Modo minore, per la picciola

quantità

quantità 80 : 81 chiamata Comma, la quale dai Temperamenti si distribuisce, e si fa suanire; di modo che in qualunque musico Stromento a due Tuoni relativi, uno per Terza maggiore, l'altro per Terza minore, compete la medesima Scala.

Dei Modi derivati.

Il Sistema Diatonico non contiene solamente i due Modi maggiore, e minore, ma ne comprende parimente altri cinque, ch'io soglio chiamar derivati. I tre perfetti consonanti accompagnamenti fondati sulle corda prima, quarta, e quinta determinano la Scala dei due Modi primitivi, per Terza maggiore, e per Terza minore. Al contrario la Scala dai Modi derivati, ch'essi hanno comune coi primitivi, determina i tre accompagnamenti, a cui servono di base le relative corde prima, quarta, e quinta. In due Modi hanno luogo soltanto accompagnamenti per Terza maggiore, e per Terza minore presi in prestanza dai Modi primitivi, e di più in tre Modi si insinua un accompagnamento nuovo di Terza minore con Quinta diminuita, avente per fondamento la corda, ch'è settima nel Modo per Terza maggiore, seconda nel Modo relativo per Terza minore.

Origine dell'accordo di Terza minore, e Quinta diminuita.

Calando la Quinta diminuita dalla Quinta giusta pel minor Semituono, che Unisono diminuito si può nominare, rappresenta ancora quanto basta essa Quinta giusta, e quindi io chiamo accompagnamenti consonanti per rappresentanza quelli, che contengono qualche consonanza

Quali accordi siano da me chiamati consonanti per rappresentanza.

consonanza in simil guisa alterata. Fra i due accordi derivati dal mentovato di Terza minore e Quinta diminuita, quello di Terza minore e Sesta maggiore piace più del supposto fondamentale; perciocchè al suo Basso la miglior unione di rapporti si riferisce. L'ultimo posto tocca all'altro derivato di Quarta superflua e Sesta maggiore.

*Utilità dei Modi derivati.*

La considerazione dei nostri Modi derivati, di cui ho arricchita la Musica, è sommamente necessaria per rendere ragione di molti passi frequentatissimi nel Contrappunto. Componendo per il Modo maggiore, o minore si fa continuo transito ai Modi derivati, e spesso si pone in opera l'accompagnamento di Terza minore e Quinta diminuita, che unicamente dai Modi suddetti è introdotto nell'armonia. Col mezzo di tale accompagnamento, dato principio dall'accordo perfetto fondato sulla base del Modo maggiore, o minore, e mossi sette passi di Quarta all'insù, o di Quinta all'ingiù,

*Origine del passo fondamentale di Quinta diminuita all'ingiù.*

fra i quali ce n'è uno di Quarta superflua, o di Quinta diminuita, a cui i Modi derivati aprono l'adito nella melodia fondamentale, si ritorna con una specie d'armonica circolazione al primo accompagnamento. Ai suoni diatonici hanno i vecchi Maestri adattate le sette lettere A, B, C, D, E, F, G, di cui sono formate le Scale e dei Modi primitivi maggiore, e minore fondati sulle lettere C, A; e

dai

dei Modi derivati, ai quali le rimanenti cinque lettere somministran la base. I Modi derivati sono talmente connessi coi primitivi, che comunemente non si reputa cangiar Tuono il modulare da un Tuono primitivo ai suoi derivati, ed il ritornare da questi a quello. Perciò da indi innanzi quando userò il termine assoluto di variar Tuono, intenderò sempre di parlare dei Tuoni primitivi.

*Connessione dei Modi derivati coi primitivi.*

*Dei Tuoni subordinati.*

Richiede la varietà, che una musica composizione non si fermi sempre nel Tuono principale, ma vada altresì girando per alcuni Tuoni, che col principale abbiano stretta attenenza, e che subordinati si appellano. Due sono i fonti della subordinazione; o la relazione in consonanza perfetta della base del Tuono subordinato a quella del principale, la qual relazione sia accompagnata dalla comunione di due accordi, o l'identità della Scala. Fondati due Tuoni simili al principale sulle corde quarta, e quinta, che alla prima corrispondono in consonanze perfette, ciascuno ha due accompagnamenti comuni col principale, ed allo stesso è subordinato. Due suoni del terzo accompagnamento sono contenuti nella Scala del Tuono principale, e non si trova modificato dal Semituono minore salvo che un suono solo; di modo che le due Scale del Tuono principale, e del subordinato si uniscono in sei suoni, ed in uno solamente discordano per la notata differenza

*La subordinazione deriva da due fonti.*

varrai, che per altro non toglie fra i due suoni diversi qualunque specie di Unisono. Il Tuono prin=cipale, e i due subordinati simili hanno comune la Scala co' loro relativi, i quali sono per Terza minore, se il Tuono principale è per Terza maggiore, o a rove=scio. Questa comunione di Scala ottiene lo effetto, che il Tuono relativo al principale serbi col medesimo subordinazione; e che allo stesso Tuono principale, a cui sono subordinati i Tuoni simili fondati sulle corde quarta e quinta, lo siano parimente i loro ~~[illegible]~~ relativi. Non vo=glio lasciar di notare, che com=ponendo o per un Tuono con Ter=za maggiore, o per il relativo con Terza minore, abbiamo lo stesso aggregato di sei Tuoni, pe' quali può vagare la cantilena. I nominati sei Tuoni saranno C, F, G per Terza maggiore, A, D, E per Terza minore, posto che si assumano come principali o il Tuono C, o il Tuono A, nella Sca=la dei quali le coppie di Tuoni relativi G, E; F, D alterano, quella lo unico suono F col Diesis, questa lo unico suono B col b molle.

*Componendo per un Tuono, o pel suo re=lativo, si può vagare per gli stessi sei Tuoni.*

Per giudicare della rispet=tiva eleganza delle modulazioni dal Tuono principale ai subordi=nati, egli è di uopo aver mira a due circostanze. Una compren=de soltanto i Tuoni simili al prin=cipale, l'altra gli abbraccia tutti

*Della relativa eleganza delle modulazioni dal Tuono principa=le ai subordina=ti, la quale di=pende da due circostanze.*

universalmente

universalmente. Essendo il passo dalla prima alla quinta corda migliore di quello dalla prima corda alla quarta, per questo titolo la modulazione al Tuono simile fondato sulla quinta corda dee preferirsi a quella, che si trasferisce al Tuono simile, a cui la quarta corda serve di base. Generalmente poi la modulazione riesce tanto più grata, quanto o non si altera alcun suono dal Tuono subordinato, ovvero il suono alterato tiene in esso un posto di minor conto; giovando che nel detto Tuono formi consonanza imperfetta piuttosto che perfetta, o equisonanza, e rendendosi meno sensibile, che l'alterazione cada sopra una consonanza perfetta, anzi che sopra una equisonanza. Non mi è noto che questa riflessione sia a veruno per lo addietro venuta in mente.
Siano principali o il Tuono C per Terza maggiore, o il Tuono A per Terza minore, e si troverà che il suono alterato F# nel Tuono maggiore subordinato G forma colla quinta corda D Terza maggiore consonanza imperfetta; e nel Tuono minore subordinato E si riferisce alla quinta corda B in quinta consonanza perfetta. Nel Tuono maggiore subordinato F il suono alterato B♭ ha il grado di equisonanza; perchè serve di fondamento ad uno dei tre accompagnamenti, dai quali nasce esso Tuono; ed è consonanza imperfetta nel Tuono minore subordinato D, corrispondendo

spondendo in Terza minore alla quarta corda G. Se il Tuono principale è per Terza maggiore, amendue le notate particolarità favoriscono il transito al Tuono, che ha per base la quinta corda, mentre si paragoni colla modulazione, che si muove verso il Tuono sulla quarta corda fondato. Che se il Tuono principale è per Terza minore, le due nominate modulazioni meritano a un di presso eguale stima, essendo ad ognuna di esse una circostanza favorevole, e l'altra contraria. Quando la modulazione si trasferisca ad un Tuono di natura diversa da quella del principale, e che questo sia per Terza maggiore, il passaggio al Tuono relativo a quello, cui serve di fondamento la quarta corda, esempigrazia da C maggiore a D minore, dee alquanto preferirsi all'altro, esempigrazia da C maggiore ad E minore, che guida al Tuono relativo a quello sulla quinta corda fondato; perchè il suono alterato è consonanza imperfetta nel Tuono D, perfetta nel Tuono E. Succede tutto il contrario, quando il Tuono principale è per Terza minore, approvando l'orecchio fra le due modulazioni da A minore a G maggiore, da A minore ad F maggiore più la prima che la seconda; a cagione che il suono alterato nel Tuono G è consonanza imperfetta, nel Tuono F equisonanza.

Paragone delle modulazioni dal Tuono principale ai Tuoni simili.

Paragone delle modulazioni ai Tuoni dissimili.

Quantunque la primaria origine del Sistema Cromatico (parlo

Origine del Sistema Cromatico.

(parlo del moderno, e non dell' antico) debba attribuirsi alle corde artificiali, delle quali a suo luogo farò menzione, ciò non ostante lo possiamo altresì concepire prodotto dall' unione del Tuono principale, e dei cinque subordinati, coll' aggiunta pure delle settime corde artificiali dei tre Tuoni per Terza minore, che, come vedremo, sono indispensabilmente necessarie a quasi tutte le Cadenze dei Tuoni stessi. Adempiuta la detta unione, ne risulta la Scala Cromatica, che divide l' Ottava in dodici Semituoni, sette maggiori, e cinque minori. Conforme sì fatta idea due Tuoni relativi, uno per Terza maggiore, l' altro per Terza minore hanno del pari comune e la Scala Diatonica, e la Scala Cromatica.

*Origine del Sistema enarmonico.*

Per far nascere il Sistema enarmonico, ch' io chiamerò moderno, il quale divide l' Ottava in 19. elementi di due specie, bisogna accoppiare al Tuono principale parecchi Tuoni, che ad esso non sono subordinati. Questa è la ragione, per cui il Sistema enarmonico inventato dai Greci è andato poscia in disuso per la sua soverchia difficoltà, la quale era una tacita ammonizione del senso della irregolarità del Sistema.

*Delle modulazioni irregolari da Tuono a Tuono.*

Non si trattengono sempre i Maestri di Musica dentro i limiti dei Tuoni subordinati, ma da questi di tanto in tanto si prendono

la

la licenza di trasferirsi a Tuoni, che o sono simili al principale, ed hanno con esso un accompagnamento comune, o sono relativi ai Tuoni simili mentovati. Tutti questi Tuoni alterano per il minor Semituono due corde della Scala del Tuono principale. Il rispettivo pregio delle modulazioni, di cui parliamo, dipende da cose già spiegate, cioè a dire dalla perfezione del doppio transito dal Tuono principale ad un subordinato, e da questo ad uno dei nostri Tuoni, che al Tuono medio abbiano subordinazione.

Dalla modulazione dal Modo maggiore al minore sulla stessa base fondato.

Spenderò più parole intorno alla modulazione, che passa da un Tuono per Terza maggiore al Tuono per Terza minore appoggiato alla stessa base. Un Tuono subordinato simile al principale ha con esso comuni due accompagnamenti, che portano seco la comunione di due equisonanze, di due consonanze perfette, e di due imperfette, e non modifica col Semituono minore, salvo che una sola corda del Tuono principale, la qual modificazione per altro in alcuni Tuoni cade o sopra un'equisonanza, o sopra una consonanza perfetta. Il Tuono per Terza minore ha comuni col Tuono per Terza maggiore sulla medesima base fondato tre equisonanze, e tre consonanze perfette, ed altera col Semituono minore tre suoni, che in esso tengono il posto di consonanze imperfette. La comunanza d'un miglior aggregato di

consonanze

consonanze supplisca quanto basta alli alterazione di tre suoni, massimamente che i suoni alterati sono consonanze imperfette. Si aggiunge che usandosi spessissimo nel Modo per Terza minore la settima corda artifiziale, e in grazia di questa non di rado la sesta corda parimente artifiziale, le quali crescono sopra le naturali per il minor Semituono, e sono unisone alle corrispondenti del Tuono per Terza maggiore sullo stesso suono fondato; sostituite le corde artifiziali alle naturali, la nuova Scala, che ne risulta, differisce in un solo suono da quella del suddetto Tuono per Terza maggiore. Conciossiachè fra i nostri due Tuoni non c'è rigorosa subordinazione, la modulazione di cui parliamo viene esclusa dalle più serie composizioni, quali sono le ecclesiastiche, e specialmente quelle a cappella. I Maestri, che compongono sullo stile da teatro, ed i Compositori di Sonate la mettono in opera frequentemente.

Dalle modulazioni irregolari passo alle difettose, nascenti dal trasferirsi immediatamente da un Tuono all'altro, che non sono legati da vicendevole subordinazione, o usando come naturale quell'accompagnamento, che prima si era adoprato come artifiziale, o facendo tutto al contrario, o pure supponendo eguali i due Semituoni maggiore, e

Delle difettose modulazioni da Tuono a Tuono

minore

minore, e conseguentemente nulla la loro differenza, e trasformando così un accordo in un altro, i quali a due Tuoni mutuamente non subordinati appartengono.

Della Battuta.

È cosa sommamente importante il dare una giusta idea della Battuta, ch'è quella misura di tempo prescritta dal Maestro ai Sonatori, e ai Cantori. La Battuta ha due parti, una principale compresa fra il battere, ed il levare, che tempo buono si appella, l'altra secondaria contenuta fra il levare, ed il battere, che tempo cattivo suole chiamarsi. Deggionsi essi tempi proferire in maniera, che il buono si sostenga da se, ed il cattivo s'appoggi al tempo buono, da cui principia la susseguente Battuta. L'orecchio non approva fra le due parti della Battuta, fuorchè le due equisone ragioni 1 : 2, 2 : 1, che ci somministrano due primitive Battute, una a due tempi, cui si dà nome di tempo di egualità, l'altra a tre tempi, che tempo di inegualità, ed anche Tripola vien nominata. Un tempo della Battuta si può dividere similmente in due, o tre tempi, e queste Divisioni si debbono pronunciare nella medesima guisa di una Battuta a due, o a tre tempi. Lo stesso dicasi delle suddivisioni. Dalle predette Divisioni, e suddivisioni traggono l'origine alcune Battute derivate. Dividendo per metà le due porzioni della

Maniera di pronunciare i tempi buono, e cattivo.

Misura

Misura a due tempi, ne risulta la Battuta a quattro tempi; e suddividendo ognuno di questi in tre parti, ci si presenta la Battuta chiamata Dodecupla. Col partire in tre membri le due metà della Battuta a due tempi, si determina la Battuta nominata Sestupla; e dividendo altresì per tre i tre tempi della Tripola, ne deriva la Misura intitolata Nonupla.

Metodo inventato dai Musici per indicare le diverse Battute.

A ragione di esprimere le durazioni dei suoni, sono state inventate dieci note, o figure musicali, che decrescono in ragione geometrica continua di 2 : 1, e si chiamano Massima, Lunga, Breve, Semibreve, Minima, Semiminima, Croma, Semicroma, Biscroma, Semibiscroma. Queste note servono ottimamente per la divisione, e suddivisione in due parti. Ma dovendosi spesso partire un tempo in tre membri, si sono i Musici appigliati allo espediente di scrivere un punto dopo la nota, e di far sì che il punto equivaglia alla metà della nota; di modo che una nota seguita dal punto vaglia tre metà della nota senza il suddetto segno. Ci sono varie Battute a due, a tre, a quattro tempi &c., secondo che questi tempi si pongono eguali o ad una nota, o ad un' altra, alle quali o non succeda il punto, se si vogliono dividere per metà, o sono seguitate dal segno stesso,

se

sa la Battuta richiede, che si partiscano in tre porzioni. Hanno i Musici stabilite due Battute in tempo d'ugualità, una alla Breve, l'altra alla Semibreve, che sono due figure, a cui le mentovate Battute si uguagliano. Considerando poscia la Battuta alla Semibreve come unità, in relazione ad essa hanno di=notate tutte l'altre Battute con un esponente, o frazione, che esprime la proporzione fra le dette Battute, e quella alla Semibreve. Il numeratore della frazione ci manifesta la qua=lità della Battuta, richiedendo=si o un due, o un tre, o un sei, o un nove, o un dodici, conforme che la Battuta è a due tempi, ovvero una Tripola, una Sestu=pla, una Nonupla, una Dodecu=pla. Il denominatore poi si fa eguale al numero delle note, che contiene la Battuta alla Semibre=ve, simili a quelle due, tre, sei, nove, dodici, che formano la Bat=tuta che si vuol indicare. Esem=pigrazia la frazione $\frac{2}{4}$ signifi=ca una Battuta a due tempi, che delle quattro Semiminime com=ponenti la Battuta alla Semibre=ve, due ne contiene. Si pratica lo stesso artifizio degli esponenti anche per ispezzare in tre, o in sei elementi una nota non segui=tata dal punto, ovvero per divi=dere in due, o in quattro parti una nota col punto accanto.

Questo

Questo è l'ordine, e la sostanza delle cose più importanti contenute nel primo Libro.

## Libro secondo.

*Dei passaggi.*

Innoltrandomi frattanto a darle contezza, Signor Tovarante stimatissimo, di ciò che comprenda il secondo Libro, sappia che ad esso somministrano l'argomento i passaggi da un accompagnamento all'altro, i quali accompagnamenti spettano al Tuono principale, ed a' suoi subordinati.

*Regole per giudicare della bontà d'un passaggio.*

Per giudicare d'un passaggio egli è buon conto necessario aver mira alla perfezione degli accordi armonici, e del movimento fondamentale di melodia, e dei derivati; alla buona, o cattiva relazione, che ne risulta dalla memoria dei suoni dell'accompagnamento antecedente posti al paragone con quelli del susseguente; alle consonanze per rappresentanza o mitigate dalla preparazione, o introdotte di posta, o da una inversa preparazione rese più austere. Vedremo a suo luogo in che consistano le preparazioni diretta, ed inversa.

*Dei passaggi strettamente spettanti o al Modo maggiore, o al minore.*

Vuole il buon metodo, che si dia principio dai passaggi composti di due accompagnamenti, in cui non c'entrano salvo che corde naturali, e che agli altri tutti precedano quelli, che si trasferiscono dall'uno all'altro dei tre accompagnamenti fondati sulla corda prima, quarta, e quinta del Modo maggiore, o minore, dai quali essi Modi traggon l'origine. Colla stessa occasione scoprirò la

sorgente

sorgente, donde derivano le corde, e gli accompagnamenti artificiali. Ascendono al numero di sei in ciascun Modo i passaggi composti dai tre nominati accompagnamenti, nè io mi metterò qui a riferire le riflessioni fatte da me fatte intorno la loro vicendevole perfezione. Noterò solo che l'ultimo posto tocca al passaggio dalla quinta corda alla quarta, essendo i due accompagnamenti fondati sulla corde fra le tre le meno squisite, meno degli altri elegante il passo fondamentale di melodia, e facendosi transito dalla corda più perfetta alla meno perfetta. Aggiungasi che nel Modo maggiore, ed anche nel minore, quando alla sua quinta corda si assegni l'accompagnamento artificiale per Terza maggiore, il nostro passaggio non ama di essere usato da base a base; perchè la Terza maggiore dell'accordo antecedente, di cui si conserva la memoria, forma col suono fondamentale dell'accordo susseguente Quarta superflua, dissonanza di molto austera natura.

Delle Cadenze

Fra i sei ricordati passaggi a quattro compete il titolo di Cadenze, le quali sono que' movimenti atti a lasciar contento l'orecchio, che pongono fine alla cantilena, o ad un qualche suo passo. Ne abbiamo due, che finiscono, come richiede la maggior convenienza nella prima

Due finiscono nella prima corda.

corda

corda base del Modo, cioè a dire la perfetta dalla quinta corda alla prima, che sola appaga compiutamente l'udito; perchè la quinta corda alla prima nell'ottima non equisona proporziona si riferisca; e quella, che suole chiamarsi ecclesiastica, dalla quarta corda alla prima. Non disapprova altresì il senso, che le Cadenze terminino nella quinta corda, che ho già notato aver colla prima la più semplice non equisona relazione. A questo genere appartengono l'altre due Cadenze dalla prima corda alla quinta, dalla quarta corda alla quinta.

Ed altresì tanto nella quinta.

Avendo il Modo per Terza minore comune la Scala col relativo per Terza maggiore, l'orecchio ben presto si accorgerebbe, quando non si ricorresse a qualche artifizio, che la Scala di quello non è fondata sull'ottima base, ed allora solo si chiamerebbe contento, quando la composizione nella prima corda di questo avesse il suo fine. Quindi acciocchè il Modo minore possa sostener la figura di principale, non basta che nei passi fondamentali le sue Cadenze siano simili a quelle del Modo maggiore, ma bisogna altresì renderle somiglianti col mezzo delle corde artificiali in alcuni movimenti delle parti acute più notati dal senso, e tali sono i passi di Semituono maggiore, il quale ha un carattere

Come si rendano conchiudenti le Cadenze del Modo minore.

medio

del Modo derivato, che ha per basso mane alla sa la quarta corda del Modo maggiore, la sesta corda del Modo minore, la qual Cadenza relativamente al Modo maggiore si trasferisce dalla settima corda alli ottava. Rendendo vizioso la detta aumentazione il passaggio dalla quarta corda artificiale alla prima, e col movimento piccante di Quarta superflua, e per altre ragioni, che riferirò dappoi trattando del passaggio simile dalla settima alla quarta corda del Modo maggiore, diviene necessaria, e per consequenza atta a maggiormente conchiudere la Cadenza dalla quarta corda artificiale alla quinta. Alla quarta corda artificiale del Modo maggiore corrisponde l'accompagnamento di Terza minore, e Quinta diminuita, simile a quello introdotto in Musica dai Modi derivati, che può competere alla corda settima del Modo maggiore, seconda del Modo minore.

La quarta corda artificiale del Modo minore apre l'adito ad un nuovo accompagnamento di Terza e Quinta ambo diminuite indicato dai numeri 7, 6, 10 esprimenti i suoni che lo compongono, il quale non può adoprarsi se non nel detto Modo, e particolarmente nella Cadenza dalla quarta corda artificiale alla quinta. Dal mentovato accompagnamento ne derivano due, uno 4, 5, 7 di Terza maggiore e Sesta superflua, al cui Basso si riferisce la

Origine nel Modo minore dell'accordo di Terza e Quinta ambo diminuite.

miglior

miglior unione di intervalli, l'altro 5, 7, 4 di Quarta superflua e Sesta minore, che merita qualche preferimento sopra quello, che di fondamentale fa la figura. Nel Modo per Terza minore colla quarta corda artificiale si può congiungere la sesta parimente artificiale, onde alla detta quarta corda si adatti l'accompagnamento di Terza minore e Quinta diminuita. Non ripeto qui quello, che ho detto della sesta corda artificiale, trattando della Cadenza dalla quarta corda naturale alla quinta.

Tempi convenienti ai due accordi della Cadenza

L'antecedente accordo di qualunque Cadenza dee collocarsi in tempo cattivo, il susseguente in tempo buono. Chi si regolasse a rovescio, metterebbe in opera dei passi, che lascierebbero sospeso il senso della cantilena. Essendo la Cadenza come una specie di riposo, egli è di uopo che finisca in tempo buono, che reggendosi da se, esprime ottimamente la quiete, e non in tempo cattivo, che dovendo per sua natura cadere sopra il susseguente tempo buono, va sempre accompagnato dal moto.

Dei passaggi o propri dei Modi derivati, o che si trasferiscono da Modo a Modo, che hanno comune la Scala.

Ai passaggi finora esaminati vuole il buon ordine che seguano quelli, i quali si trasferiscono dai tre accompagnamenti generanti il Modo per Terza maggiore ai tre generanti il Modo relativo per Terza minore, o al contrario; dai sei suddetti accompagnamenti a quello di Terza minore e Quinta diminuita introdotto

nel

nel Contrappunto dai Modi derivati, o al contrario. Divido i nostri passaggi in tre classi; e cominciando dalla prima, dico che tre discendono per una Quinta, o ascendono per una Quarta, e questi nei Modi derivati si movono o dalla quinta corda verso la prima, o dalla prima corda verso la quarta. Altrettanti contrarj ai nominati o ascendono per una Quinta, o discendono per una Quarta, e questi nei detti Modi fanno transito o dalla prima alla quinta corda, o dalla quarta corda alla prima.

Passaggi di Quinta, e di Quarta proprj dei Modi derivati.

Le due Cadenze imitanti la perfetta, che nei Modi derivati fondati sulla quinta corda dei primitivi passano dalla quinta alla prima corda, nei detti Modi primitivi fanno transito dalla seconda corda alla quinta. Si appropriano questi Modi le mentovate Cadenze, e le perfezionano colle corde artificiali; perché terminano nella loro quinta corda atta a dar fine ad una Cadenza. Acciocché la Cadenza dalla seconda alla quinta corda del Modo maggiore imiti la perfetta dello stesso Modo nei movimenti di Semituono, egli è d'uopo introdurre nell'accompagnamento antecedente la quarta corda artificiale, che rende la Cadenza medesima affatto simile al suo esemplare. Usando nella Cadenza analoga del Modo minore le corde artificiali quarta e settima, si ascende come nella perfetta del Modo maggiore dalla Terza dell'accordo antecedente alla

Della Cadenza dalla seconda alla quinta corda dei Modi maggiore, e minore.

basa

basa del susseguente, e si discende dalla Settima aggiunta all'accordo antecedente alla Terza del susseguente per un maggior Semituono, e ciò senza pregiudizio di verun Semituono naturale.

Il naturale antecedente accompagnamento di Terza minore e Quinta diminuita, mediante la quarta corda artificiale, diviene di Terza maggiore e Quinta diminuita. Un tale accompagnamento, e i suoi derivati, benchè assai piccanti, posti in opera a tempo, ed a luogo nella sola Cadenza dalla seconda alla quinta corda del Modo minore, da cui hanno tratta l'origine, producono un ottimo effetto. Si possono nell'antecedente accompagnamento congiungere le corde artificiali quarta e sesta, quando dalla sesta corda artificiale si voglia salire alla settima artificiale contenuta nel susseguente accompagnamento.

Origine nel Modo minore dell'accordo di Terza maggiore e Quinta diminuita.

Essendo le Cadenze perfette dei Modi primitivi composte di due accordi veramente consonanti, in due maniere si può accomunare questa proprietà alla Cadenza dalla seconda alla quinta corda del Modo minore o accrescendo per un Diesis la Quinta, o scemando per un b molle la basa dell'accompagnamento antecedente. Più gradita riuscirà la seconda maniera, la quale non toglie il Semituono naturale, per cui si discende dalla Quinta dell'accordo antecedente al suono fondamentale

Come si introduca nel Modo minore la seconda corda artificiale.

fondamentale del susseguente. Si introduce con questo mezzo nel Modo minore la seconda corda artificiale, che cala dalla naturale un minor Semituono, e che solo può aver luogo nel precedente accompagnamento della Cadenza dalla seconda alla quinta corda, per cagione della quale è accettata nel Contrappunto. Due maggiori Semituoni comprende la Cadenza perfetta del Modo maggiore dalla Terza, e dalla Settima delli accordo precedente alla base, e alla Terza del susseguente. Non potendosi dalla nostra Cadenza dalla seconda alla quinta corda del Modo minore, introdotta che sia nella stessa la seconda corda artificiale, imitare il primo Semituono, resta che per appagare li orecchio almeno imiti il secondo, ammettendo nelli accordo susseguente la settima corda artificiale, onde conformandosi nelli armonia alla Cadenza perfetta del Modo maggiore, sia composta di due consonanti accompagnamenti per Terza maggiore. Quanto si migliora li armonia, altrettanto si sconcerta la melodia, corrispondendo la seconda corda artificiale alla quinta in Quarta superflua. Per ovviare a questo inconveniente, si schiva il passo fondamentale di melodia, e per lo più si fa transito dalla quarta alla quinta corda, assegnando a quella li accompagnamento derivato di Terza e Sesta ambedue minori, che più delli

altro

altro derivato di Quarta e Sesta maggiore ama di essere collocato nel Basso continuo.

Passaggio vietato da base a base, che si muove dalla settima corda verso la quarta del Modo maggiore.

Fra i sei passaggi della prima classe, che ascendono, o discendono per una Quarta, o per una Quinta, non si può usare da base a base quello, che si muove o dalla settima corda del Modo maggiore verso la quarta, o dalla seconda corda del Modo minore verso la sesta. Dipende un tale divieto dall'aggregato di tre imperfezioni, cioè che il passo fondamentale di melodia è di Quarta superflua all'ingiù, o di Quinta diminuita all'insù; che il suono, base dell'accordo antecedente, di cui conservasi la memoria, risponde alla base del susseguente in Quarta superflua, dissonanza assai dura; e che la Quinta diminuita del primo accordo diviene Ottava nel secondo. Siccome una consonanza per rappresentanza si prepara, e riesca più mite, quando lo stesso suono nel precedente accompagnamento è stato veramente consonante; così il prevertire quest'ordine, facendo sì che la consonanza per rappresentanza divenga vera consonanza nel susseguente accordo, la rende notabilmente più austera. Ad un tal ordine prevertito io do nome di inversa preparazione. Cinque passaggi fondamentali dalla seconda.

Cinque passaggi fra i dieci della seconda classe camminano dalla quarta alla quinta corda dei Modi derivati, ed altrettanti si movono dalla quinta corda alla quarta. Facendo transito i primi cinque passaggi di Seconda all'insù da una corda meno perfetta ad una più perfetta, e succedendo il contrario negli altri cinque di Seconda all'ingiù, ella è cosa chiara, che quelli a questi si deggiono preferire; il che puntualmente si accorda colla esperienza.

De' passaggi di Seconda all'insù, e all'ingiù propri dei Modi derivati.

Perchè si primi sieno migliori dei secondi.

Passano dalla settima all'ottava corda dei Modi primitivi quelle due Cadenze, che nei Modi derivati fondati sulla quarta corda dei suddetti Modi primitivi si trasferiscono dalla quarta corda alla quinta. Conciossiachè le mentovate Cadenze finiscono nell'ottava corda equisona alla prima dei Modi maggiore, e minore, le accettano essi come loro proprie, ed i Maestri le pongono in opera frequentemente nelle musiche composizioni. Ho notato di sopra, che la Cadenza dalla settima corda all'ottava del Modo maggiore è il modello di quella, che nel Modo stesso si trasferisce dalla quarta corda artificiale alla quinta. Non si può introdurre nella Cadenza analoga del Modo minore il Semituono dalla Quinta dell'accordo antecedente alla Terza del susseguente; perchè questo distruggerebbe il Semituono naturale dalla Terza del primo

Delle Cadenze dalla settima corda all'ottava dei Modi maggiore, e minore.

accordo

accordo a quella del secondo.
Rimane adunque da imitare il Semituono dall'una all'altra base, sostituendo nell'accompagnamento antecedente la settima corda artifiziale alla naturale, ond'esso si tramuti nell'accordo consonante per rappresentanza di Terza minore e Quinta diminuita.

Acciocchè un passaggi di Seconda all'ingiù si usi non di rado specialmente da base a base, bisogna che parecchie circostanze lo favoriscano. S'incontreranno esempigrazia con frequenza i passaggi dalla seconda alla prima corda, dalla sesta alla quinta del Modo maggiore; perchè quantunque nei Modi derivati, a cui appartengono, si muovano da una corda più perfetta ad una meno perfetta, nel Modo maggiore succede tutto a rovescio. In secondo luogo si migliora accompagnamento, facendo transito da un accordo per Terza minore ad un altro per Terza maggiore. In terzo luogo i suoni dell'accompagnamento antecedente corrispondono alla base del susseguente in dissonanze tutte familiarissime al Contrappunto.

Quali passaggi di Seconda all'ingiù si usino frequentemente.

Giungono al numero di quattordici i passaggi della terza classe, sette discendenti, e sette ascendenti per una Terza. Si trasferiscono essi da Modo a Modo, e mancando ai due accompagnamenti quel legamento, che porta

Dei passaggi di Terza all'ingiù, e all'insù, che si trasferiscono da Modo a Modo.

seco lo identità del Modo, supplisce a ciò la comunione di due suoni, ed il semplice movimento di una sola parte acuta di Seconda allo insù, o allo ingiù, mentre si fa transito dal precedente al susseguente accompagnamento. Più che i passaggi di Terza allo insù gradisca il senso quelli di Terza allo ingiù: ed eccone la ragione. La Terza inferiore non è contenuta nello antecedente accompagnamento, e perciò alla detta Terza io possa assegnare quello accompagnamento che più mi piace. Tutto allo opposto la Terza superiore è compresa nello accompagnamento di Terza e Quinta, e corrispondendo ad essa lo accordo derivato di Terza e Sesta, ch'è quel solo, che senza variar Modo le possa competere, lo orecchio desidera, che ascendendo il Basso alla Terza, continui il già udito accordo; di modo che sentendo in sua vece lo accordo di Terza e Quinta, resta defraudata la sua aspettazione.

Ragione, per cui i passaggi di Terza allo ingiù piacciono più che quelli di Terza allo insù.

Tutti i sette passaggi di Terza allo ingiù si usano con frequenza, e troppo lungo sarebbe il far di ognuno menzione. Dirò solo qualche cosa di quel passaggio, che si trasferisce dalla quinta alla terza corda del Modo per Terza minore. Assegnato alla mentovata quinta corda lo accompagnamento artificiale di Terza maggiore e Quinta, se col passaggio di Terza allo ingiù ho in animo di far transito al Modo relativo per Terza maggiore, cui serve di

base

base la terza corda del Modo minore, io deggio dare alla prima corda del Modo maggiore lo accompagnamento conveniente di Terza maggiore e Quinta, e far sì che una parte discenda pel Semituono minore dalla settima corda artificiale del primo Modo alla quinta del secondo. Ma se mia intenzione si è di fermarmi nel Modo minore, continuo anche nello accordo susseguente la settima corda artificiale, che nello antecedente formava Terza maggiore, e adatto per conseguenza alla terza corda del Modo lo accompagnamento artificiale di Terza maggiore e Quinta superflua. Un tale accompagnamento, che non può competere, salvo che alla terza corda del Modo minore, ha i due suoi derivati. Suole per lo più usarsi in sua vece quello di Terza maggiore e Sesta minore, che è migliore e del fondamentale, e dello altro derivato, perchè al Basso due consonanze vere si riferiscono.

Origine principale nel Modo minore dello accordo di Terza maggiore e Quinta superflua.

Non mi è giammai caduto sotto degli occhi usato da base a base il passaggio di Terza allo insù dalla settima alla nona corda del Modo maggiore, dalla seconda alla quarta corda del Modo minore. Oltre alla già notata circostanza; che rende non del tutto grati i passaggi di Terza allo insù, si contiene in esso lo imperfezione, che la Quinta

Quale passaggio di Terza allo insù non si trovi usato da base a base.

Diminuita

diminuita dell'accordo antecedente diviene Terza minore nel susseguente. Si adopra il nostro passaggio con eleganza, ponendo nel Basso la Terza dell'accompagnamento antecedente, alla quale si riferisce l'accordo derivato di Terza, Sesta, e Ottava, e dando poscia allo stesso Basso l'accordo fondamentale di Terza, Quinta, e Settima.

Dei passaggi naturali, che si trasferiscono dal Tuono principale ad un subordinato, o a rovescio.

Detto quanto basta dei passaggi naturali spettanti allo stesso Modo primitivo considerato unitamente cogli altri Modi, che con esso hanno comune la Scala, m'avanzo a trattare dei passaggi naturali, che necessariamente si trasferiscono dal Tuono principale ad un subordinato, o a rovescio, siccome quelli che sono composti di due accompagnamenti, nessun de' quali è ai due Tuoni comune. Effettuandosi il più perfetto transito da Tuono a Tuono col mezzo d'un accompagnamento ad ambi i Tuoni spettante, i passaggi di cui parliamo, che montano alla somma di trentasei, contengono una modulazione, che fra le permesse è la meno semplice. Perciò quantunque niuno di questi passaggi assolutamente si escluda, nulladimeno assai di rado si incontrano, e vogliono usarsi con gran cautela quelli, in cui qualche particolarità non del tutto favorevole si comprende. Tali sono in riguardo alla melodia i passaggi di Quarta superflua, o di Quinta diminuita all'insù, e all'ingiù; i passaggi di Seconda all'ingiù, e di Terza all'insù: ed in riguardo all'armonia i passaggi, che di due accompagna=

menti

menti di Terza minore e Quinta diminuita sono composti. Nello stesso numero deggiono pure collocarsi i passaggi formati di due accordi, il primo di Terza minore e Quinta diminuita, ed il secondo veramente consonante e fondato sulla medesima base, ovvero sopra una base, che da quella del primo cala per un Semituono minore. La perfezione dell'accordo susseguente fa troppo chiaramente conoscere l'imperfezione dell'antecedente, ed in quale cattivo incontro si abbandoni un Tuono per passare ad un altro. Con molta circospezione, ed assai di rado si debbono porre in opera gli accennati passaggi, che sono venti di dieci diversa specie. Acciocché poco si paragonino insieme i due accompagnamenti che li compongono, gioverà che l'antecedente cada in tempo buono, il susseguente in tempo cattivo, o almeno tutti e due in tempo buono; schivando di collocare quello in tempo cattivo, questo in tempo buono, il cui paragone è troppo chiaro; perché il precedente tempo cattivo è sostenuto dal tempo buono, che immediatamente lo segue. Sarà ben fatto, che nel primo accordo termini una Cadenza dei Tuoni primitivi, ed anche dei derivati, e che con esso compiendosi un periodo della cantilena, col secondo accordo si dia principio ad un nuovo periodo. Si sfuggano le melodie alterate di Quinta diminuita, di Quarta superflua, ed in quei casi, nei quali

Cautele, colle quali si usano i passaggi meno perfetti di questo genere.

quali

quali prima la Quinta diminuita, indi la giusta prese o all'insù, o all'ingiù si riferiscono allo stesso suono, si usino in cambio dei fondamentali gli accordi derivati di Terza e Sesta, onde al Basso in ambi gli accordi due consonanze giuste rispondano.

Dei passaggi nei quali hanno luogo gli accordi artificiali.

Ampia materia ci somministrano quei passaggi o propij di un dato Tuono, o che da un Tuono all'altro si trasferiscono, ne' quali gli accordi artificiali hanno luogo. Enumererò prima gli accompagnamenti artificiali spettanti ai due Modi primitivi, e poscia mi ristringerò a riferire alcuni Canoni da me stabiliti per ben usare i detti artificiali accompagnamenti.

Accordi artificiali del Modo minore.

Cominciando dal Modo minore, la settima corda artificiale c'entra nei tre accompagnamenti di Terza maggiore e Quinta, di Terza minore e Quinta diminuita, di Terza maggiore e Quinta superflua fondati sulla corda quinta, settima artificiale, e terza. Si introduce la sesta corda artificiale senza la compagnia della quarta parimente artificiale nei tre accompagnamenti di Terza maggiore e Quinta, di Terza minore e Quinta, di Terza minore e Quinta diminuita, ai quali servono di base le corde quarta, seconda, e sesta artificiale. La quarta corda artificiale ha posto da se sola negli accordi di Terza e Quinta ambo diminuita, di Terza maggiore e Quinta diminuita corrispondenti alla corda quarta artificiale, e seconda. Hanno per fondamento le stesse corde due accom-

pagnamenti

pagnamenti di Terza minore e Quinta diminuita, di Terza maggiore e Quinta, nei quali si uniscono le due corde artificiali quarta, e sesta. La seconda corda artificiale non viene ammessa, salvo che nell'accompagnamento per Terza maggiore alla stessa corda appoggiato. Relativamente al Tuono A per Terza minore i nominati accompagnamenti sono i seguenti. E G♯ B, G♯ B D, C E G♯; D F♯ A, B D F♯, F♯ A C; D♯ F A, B D♯ F; D♯ F♯ A, B D♯ F♯; B♭ D F.

*Accordi artificiali del Modo maggiore.*

Il Modo maggiore non ha che la sola quarta corda artificiale, che si pone in opera nei due accompagnamenti di Terza minore e Quinta diminuita, di Terza maggiore e Quinta fondati, quello sulla detta quarta corda artificiale, e questo sulla seconda. Al Tuono C per Terza maggiore competono i due accordi artificiali F♯ A C, D F♯ A.

*Regole per i passaggi artificiali in generale.*

I passaggi artificiali si debbono adoprare con circonspezione maggiore di quella, che relativamente ai passaggi naturali rendesi necessaria. Abbiamo veduto quali mire si debbano avere per giudicar rettamente della qualità di un passaggio naturale. Richiedono di più i passaggi artificiali che si adempia quel fine, per cui le corde artificiali hanno ottenuto l'ingresso nelle musiche composizioni. Egli è di nuopo ciò effettuare con tanto maggior rigore, quanto meno necessarie sono le corde artificiali, nel qual

numero

numero vanno collocate le corde artifiziali, quanto di ambedue i Modi, e secondo del Modo per Terza minore, e quanto i suoni artifiziali sono collocati in accompagnamenti di più risentita natura.

Regola per la settima corda artifiziale del Modo minore.

Essendosi insinuata la settima corda artifiziale del Modo minore in grazia di cinque Cadenze, e principalmente della perfetta dalla quinta corda alla prima, in cui una delle parti acute procede dalla settima corda artifiziale, che molto a se chiama l'attenzione del senso, all'ottava; interviene che udito un accordo, nel quale abbia luogo esso suono artifiziale, l'orecchio aspetti o l'accompagnamento sulla prima corda fondato, o un altro in sua vece, in cui c'entri la corda ottava, onde si possa dalla settima corda artifiziale salire all'ottava, come nella Cadenza perfetta. Si fatti passaggi, che, quando non vi si opponga qualche particolare motivo, frequentemente s'adoprano, ho collocato nel primo grado.

Tocca il secondo posto a que passaggi, i quali si muovono da uno all'altro dei tre accompagnamenti, che in se stessi contengono la settima corda artifiziale. In tali passaggi non si leva all'udito il contento di sentire, che dalla settima corda artifiziale si ascenda all'ottava, ma soltanto si differisce.

Che se dalla settima corda artifiziale io non voglio montare all'ottava, potendo cessare in tal caso la ragione di usare la detta corda artifiziale, ci si affacciano i

passaggi

passaggi, che io metto nella terza sede, nei quali da un accompagnamento, che in se racchiude la settima corda artificiale, si fa transito ad un altro, che la settima corda naturale contiene.

Lo ultimo sito finalmente spetta ai passaggi, che da un accompagnamento contenente la settima corda artificiale si trasferiscono allo accompagnamento naturale, cui serve di base la seconda corda, o agli artificiali, che lo rappresentano, nei quali non c'entra né la ottava corda, né la settima artificiale, né la settima naturale. Egli è vero per altro, che in questi accompagnamenti si può introdurre la ottava corda, aggiungendo ad essa la settima, che quando è minore gode, come il vedremo, il privilegio di potersi usare di posta, e senza preparazione. Con ciò i nostri passaggi si alzano dallo infimo al primo grado: ma la imperfetta maniera, in cui la ottava corda può trovar luogo nei mentovati accompagnamenti, dimostra con evidenza la non molta eleganza dei passaggi dei quali facciam parola.

Regole per lo accompagnamento di Terza maggiore e Quinta fondato sulla quinta corda del Modo minore.

Tra gli accompagnamenti, che ammettono le corde artificiali, quello di Terza maggiore e Quinta, il quale ha per base la quinta corda del Modo minore, è sopra tutti distinto, ed i passaggi da esso accompagnamento ad un altro non sono circonscritti da regole gran fatto rigide. La settima

corda

corda artificiale, che forma la Terza maggiore del nostro accompagnamento, è stata ricevuta in Musica in grazia non solo della Cadenza perfetta, e di quella dalla settima corda all'ottava, ma ancor della tra, che passano dalla prima, o dalla quarta, o dalla seconda corda alla quinta. Quindi potendo terminare il senso della cantilena nel nominato accompagnamento, chiaro si vede il motivo, per cui fatto punto per così dire resta in mio arbitrio il passare a cose nuove, e talvolta non aspettate.

Canone primo

Dall'accompagnamento artificiale di Terza maggiore e Quinta fondato sulla quinta corda del Modo minore si può far transito ad un accompagnamento, che in se contenga o l'ottava corda, o la settima artificiale, o la settima naturale, o pur anche nessuna delle predette, e ciò gradatamente con sempre minor perfezione.

Regole per l'accompagnamento di Terza minore e Quinta diminuita fondato sulla settima corda artificiale del Modo minore.

L'accompagnamento fondamentale di Terza minore e Quinta diminuita, che compete alla settima corda artificiale del Modo minore, è d'indole non poco mita; perchè un simile accordo ha luogo, come abbiamo veduto, nel Sistema Diatonico, e se ne servono tra Modi Diatonici Derivati. Su tal fondamento si appoggia l'uso più o meno frequente, che si fa dei passaggi del primo, del secondo, e del terzo grado, nei quali al nostro accompagnamento ne succeda un altro, in

cui

cui c'entra o l'ottava corda, o la settima artificiale, o la settima naturale. I passaggi del quarto grado ad un accompagnamento, che da se escluda le nominate tre corde, ci si presenteranno molto di rado sotto degli occhi.

Canone secondo.

Dall'accompagnamento di Terza minore e Quinta diminuita, cui serve di base la settima corda artificiale del Modo minore, è concesso il passaggio, benchè sempre meno elegante, ad un accompagnamento, in cui abbia luogo o la corda ottava, o la settima artificiale, o la settima naturale. Non si esclude totalmente il passo per altro raro ad un accompagnamento, che non contenga veruna delle dette tre corde.

Regola per l'accompagnamento di Terza maggiore e Quinta superflua fondato sulla terza corda del Modo minore.

Udendosi molto austero l'accompagnamento cromatico di Terza maggiore e Quinta superflua, che può assegnarsi alla terza corda del Modo minore, non dobbiamo maravigliarci, che il senso si appaghi solo dei passaggi del primo grado, tolleri appena quelli del secondo, e rigetti poi totalmente gli altri del terzo, e del quarto grado. Desiderando l'orecchio che dalla settima corda artificiale si ascenda all'ottava, una tal brama si renda più del solito ardente, qualora si tratti dell'accompagnamento assai risentito di Terza maggiore e Quinta superflua. La mentovata ascesa libera il senso dal

più

più udire la settima corda artifi=
ciale resagli disgustosa, perchè
paragonata colla terza corda,
forma Quinta superflua; e serve
come di risoluzione al detto inter=
vallo. Da ciò ne segue, che il
differir di montare alle ottava corda,
come nei passaggi del secondo
grado, reca poco piacere, e il non
effettuare esso ascendimento, co=
me nei passaggi del terzo, e del
quarto grado, partorisce un rin=
crescimento notabilissimo.

Canone terzo.

Dall'accompagnamento di
Terza maggiore e Quinta superflua,
che ha per fondamento la terza cor=
da del Modo minore, si passi ad
un accompagnamento, in cui si
trovi l'ottava corda del Modo stesso,
e ciò si adempia quasi sempre im=
mediatamente, e qualche rarissima
volta mediatamente; frapponen=
dosi un accordo contenente la
corda settima artificiale. I pas=
saggi del terzo, e del quarto grado,
siccome troppo pungenti, restano
interamente vietati.

Regole per la sesta corda ar=tificiale del Modo minore.

Ho già fatta la riflessione,
essersi introdotta in Musica la
sesta corda artificiale del Modo
minore col solo fine di evitare il
passo di Seconda superflua, per
cui differiscono la sesta corda na=
turale, e la settima artificiale.
Quindi la sesta corda artificiale
deve o precedere, o seguire la set=
tima altresì artificiale, acciocchè
si adempia quel fine, per cui la
detta sesta corda, è stata ammes=
sa nel Contrappunto. Ben è vero
che

che si può passare dalla sesta alla settima corda amendue artificiali, o al contrario mediante la settima corda naturale, succedendo spesso che si ascenda dalla quinta corda all'ottava, ovvero che si discenda dall'ottava corda alla quinta con una progressione di Semituoni.

Canone quarto.

E' concesso solamente di usare la sesta corda artificiale del Modo per Terza minore in que' passaggi, che non ripugnano al movimento dalla sesta corda alla settima ambedue artificiali, oppure da questa a quella, in mezzo alle quali si può inserire la settima corda artificial naturale.

Conciossiachè la quarta corda artificiale non è necessaria ai due Modi per Terza maggiore, e per Terza minore, servendo solo a dar loro maggior vaghezza, ed a far sì che appaghino maggiormente le Cadenze dalle corde seconda, e quarta alla quinta; l'orecchio indispensabilmente richiede, che si compia quel fine, per cui la detta quarta corda è stata nelle armoniche composizioni accettata. Si ottiene principalmente il nominato fine, introducendo la quarta corda artificiale nell'accompagnamento antecedente delle due predette Cadenze: e si ottiene pure in una maniera secondaria, facendo che succedano l'uno all'altro gli accompagnamenti, ne' quali ha luogo la

Regola per la quarta corda artificiale dei Modi maggiore, e minore.

quarta

quarta corda artificiale, e termi=
nando poi nell'accompagnamento
sulla quinta corda fondato. Vaglia=
mi di esempio il seguente passo,
F# $^{5}_{3}$ D $^{5}_{3\sharp}$ G $^{5}_{3}$, che può adoprarsi
con lode nel Tuono C per Terza mag=
giore; perché chiaramente si sco=
pre essersi surrogata la quarta cor=
da artificiale alla naturale negli ac=
compagnamenti primo, e secondo
in grazia della Cadenza, che nella
quinta corda finisce. Aggiungasi
che nell'addotto esempio abbiamo
un aggregato delle due Cadenze
F# $^{5}_{3}$ G $^{5}_{3}$, D $^{5}_{3\sharp}$ G $^{5}_{3}$ dalla corda
quarta, e seconda alla quinta, con=
servandosi nell'orecchio la memo=
ria dell'accompagnamento F# $^{5}_{3}$,
quando ascolta l'accordo G $^{5}_{3}$. Qua=
lunque passaggio, in cui c'entri
la quarta corda artificiale, il quale
non si adatti alle leggi da me pres=
critte, merita assoluto bando dal
Contrappunto.

Canone quinto.

Da un accompagnamento,
che contiene la quarta corda artifi=
ciale dell'uno, o dell'altro Modo
per Terza maggiore, o per Terza
minore, si dee far transito o im=
mediatamente, o col mezzo di qual=
che accordo contenente lo stesso
suono artificiale all'accompagna=
mento sulla quinta corda fondato.
Qualsivoglia altro passaggio, che in
se racchiuda la quarta corda arti=
ficiale, e non possa sottomettersi
alla legge prescritta, merita di
soggiacere ad una total proibizione.

Egualmente ristretta è la Regola per la
libertà, che abbiamo di valerci dei seconda corda
passaggi

artificiale dal Modo mi= nore.

passaggi comprendenti la seconda corda artificiale del Modo minore, la quale ha luogo nel solo accom= pagnamento, a cui serve di base. Avendo fatto vedere, concedersi la seconda corda artificiale al Modo per Terza minore in grazia soltanto della Cadenza dalla seconda alla quinta corda, a cui per altro non è necessaria; egli è d'uopo lo effettuare la detta Cadenza, mentre la seconda corda artificiale vo= glia adoprarsi. Quando in opera la Cadenza di cui parliamo, una delle parti acute discende per lo intervallo di Terza diminu= ita dalla nona corda alla settima tutte e due artificiali. Di questo cromatico movimento si facilita spesso lo intonazione, dividendolo col mezzo dello ottava corda in due Seconde minori. Il predetto suo= no intermezzo ci apre lo adito a poter inserire un accompagna= mento fra i due delle corde secon= da artificiale, e quinta, che con= tenga la corda ottava, e formi Cadenza paragonato con quello della quinta corda. Di tal natu= ra è per esempio lo accompagna= mento della quarta corda; il quale racchiudendo in se stesso la corda ottava, ci fa sentire la Cadenza dalla quarta alla quinta corda. I nominati accordi nel Tuono A per Terza minore sono i seguenti: B♭6 $^{5}_{3}$ D $^{5}_{3}$ E $^{5}_{3\sharp}$, e si sogliono ado= prare nella forma, che pongo qui accanto D $^{8\,6\,6}_{3}$ $^{7}_{5}$ E $^{5}_{3\sharp}$. Accoppian= dosi insieme due Cadenze D $^{4\,6\,6}_{3}$ E $^{5}_{3\sharp}$,

D $^{7}_{\;5}_{3}$

D$\substack{7\\5\\3}$ e$\substack{5'\\3\sharp}$ ambo terminanti in e$\substack{5'\\3\sharp}$, lo orecchio non può restare se non contento. La ultima riflessione ci fa toccare con mano quanto assurda cosa sarebbe il collocare fra B♭$\substack{5'\\3}$, e$\substack{5'\\3\sharp}$ lo accompagnamento 7$\substack{5'\\3}$, che contien è vero la ottava corda A, ma non forma poi Cadenza posto al paragone con e$\substack{5'\\3\sharp}$. Egli è certo, che il passo non conchiudente 7$\substack{5'\\3}$ e$\substack{5'\\3\sharp}$ disturba assaissimo quello imperfetto compimento di senso, dal quale è fornita la Cadenza D$\substack{5\,6\\3}$ e$\substack{5'\\3\sharp}$.

Canone sesto.

Dallo accompagnamento, che ha per base la seconda corda artificiale del Modo per Terza minore, si passi allo accompagnamento di Terza maggiore e Quinta, fondato sulla quinta corda o immediatamente, o mediante un accompagnamento, in cui c'entri la corda ottava, e che col predetto accompagnamento perfetto della quinta corda formi Cadenza. Tutti gli altri passaggi contenenti la nominata corda artificiale, che non si adattano al nostro canone, debbono rigettarsi.

Quali inverse preparazioni delle consonanze cromatiche per rappresentanza siano vietate

È poco grata allo orecchio la inversa preparazione delle consonanze per rappresentazione, e specialmente di quelle proprie del Genere Cromatico, che solamente per opera delle corde artificiali si sono in Musica insinuate. Appartengono ad una tal classe la Quinta superflua, la Quarta diminuita, la Terza diminuita, e la Sesta superflua. Che se la preparazione inversa

di

di queste consonanze troppo si manifesta, il che interviene, quando la consonanza rappresentante, e la rappresentata si riferiscono allo stesso suono inferiore, o superiore; il passaggio, che contiene un sì notabil difetto, si vuole bandire dal Contrappunto. Lasciando da parte gli esempj di quei passaggi, i quali anche dai premessi canoni son dichiarati viziosi, metto sotto gli occhi di chi legge i seguenti due D♯ $^{5}_{3\natural}$ D♯ $^{5}_{3\sharp}$, B $^{5\natural}_{3\sharp}$ B $^{5\sharp}_{3\sharp}$, che comprendono entrambi il transito dalla Terza diminuita D♯ 7 alla minore D♯ 7♯, riferite allo stesso suono inferiore D♯.

Canone settimo

Si disapprovino i passaggi, in cui ad una consonanza per rappresentazione, che trae soltanto l'origine dalle corde artificiali, succeda la rappresentata, che insieme colla precedente si riferisce al medesimo suono inferiore, o superiore.

Si schivino i passaggi artificiali, che sembrano contenere una illecita modulazione da Tuono a Tuono.

Dovendosi usare con tutta la maggiore cautela i passaggi artificiali, egli è di uopo lo schivar quelli, che eccitano nelle orecchie l'idea di una illecita modulazione da Tuono a Tuono, i quali da vicendevole subordinazione non sono fra loro legati. Sia principale o il Tuono C per Terza maggiore, o il Tuono A per Terza minore, e dovranno esiliarsi dalle armoniche composizioni i passaggi, che fanno mutuo transito dai tre accompagnamenti G $^{5}_{3\flat}$, B♭ $^{5}_{3}$, C $^{5\flat}_{3}$ naturalmente spettanti

ai

ai Tuoni relativi F maggiore, D minore, ai tre $D\,{}^{5}_{3\sharp}$, $F\sharp\,{}^{5}_{3}$, $B\,{}^{5\sharp}_{3}$ appartenenti naturalmente ai Tuoni relativi G maggiore, e minore; perchè ci guidano ad un Tuono, che non è al precedente subordinato. Benchè non contengano un tal difetto i nostri passaggi, quando i tre accompagnamenti posti in secondo luogo si considerano come artificiali, i due primi del Tuono C per Terza maggiore, e tutti e tre del Tuono A per Terza minore; nulladimeno lascierei di adoprare anche quelli, che non contravvengono ai canoni già stabiliti, a cagione che possono risvegliare il sospetto d'una vietata modulazione. Non si accettui neppure il caso, quando l'accordo $B\flat\,{}^{5}_{3}$ artificiale del Tuono A per Terza minore si unisce cogli accompagnamenti $D\,{}^{5}_{3\sharp}$, $F\sharp\,{}^{5}_{3}$, $B\,{}^{5\sharp}_{3}$ artificialmente competenti allo stesso Tuono. Che se a qualcuno cadesse in pensiero di introdurre negli accompagnamenti $D\,{}^{5}_{3\sharp}$, $B\,{}^{5\sharp}_{3}$ la quarta corda artificiale $D\sharp$ del Tuono minore A, si accoppierebbero nei passaggi $G\,{}^{5}_{3}{}^{}_{6}$ $D\sharp\,{}^{5}_{3\sharp}$, $B\,{}^{6}$ ${}^{5}_{3}$ $D\sharp\,{}^{5}_{3\sharp}$ &c. accordi talmente rimoti, che difficilmente l'arte più fina di un peritissimo Maestro di Contrappunto ne potrebbe occultare la discrepanza.

Canone ottavo.

Se non meritano assoluta condanna que' passaggi, chi hanno l'apparenza di modulare da Tuono a Tuono senza il legame della

dovuta

dovuta vicendevole subordinazio=
ne, vogliono almeno usarsi as=
sai di rado, e con tanto maggior
riguardo, quanto sono formati
di accompagnamenti più fra
loro rimoti.

56

Libro terzo.

Comincia il terzo Libro colla teorica della musicale dissonanza. Ho detto nel Libro primo, che compiuto accompagnamento consonante si è quello, le cui ragioni non contengono numero impari maggiore del cinque, ed a cui qualunque nuovo suono si unisca non aggiunto ai già introdotti, lo trasforma in dissonante, dando adito ad una o a più proporzioni, che in se stessa un numero impari maggiore del cinque ricevono. Questa definizione del compiuto consonante accompagnamento, mi somministra la chiave, e generalissima idea della armonica dissonanza traente l'origine dall'aggiungere ad esso accordo consonante un novello suono.

Della musicale dissonanza.

Nascono dall'unire un nuovo suono all'accordo consonante.

Ma quali, e quanti sono i suoni, che si possono aggiungere? Le dissonanze debbono servire alle consonanze, ed avendo i tre consonanti accordi o per terza maggiore, o per terza minore determinate la Scala dei due Modi maggiore, o minore, da essa Scala si debbono prendere le Dissonanze. Nasce adunque la dissonanza dall'accoppiare coll'accordo consonante un nuovo suono preso dalla Scala del Modo maggiore, o minore, in cui si trova la cantilena. La Scala dell'uno, o dell'altro Modo contiene sette corde, tre delle quali formando

Si debbono prendere dalla Scala del Modo.

il consonante accompagnamento, resta che collo stesso si possano unire quattro corde, che al Basso di un accompagnamento fondamentale si riferiscono in Settima, in Nona equisona alla Seconda, in Undecima equisona alla Quarta, in Terzadecima equisona alla Sesta. Allegherò poscia la ragione, per cui applico tali nomi alle dissonanze.

Sono di quattro differenti spezie.

Essendo l'accompagnamento consonante fondamentale, ed i suoi derivati composti dei tre medesimi suoni, ne segue che all'uno, e agli altri gli stessi quattro suoni si possono aggiungere. Si accoppj coll'accompagnamento consonante fondamentale, e coi derivati il medesimo suono, ed i nuovi accompagnamenti conterranno gli stessi quattro suoni; di modo che nell'accompagnamento dissonante fondamentale gli altri accompagnamenti saranno compresi, e perciò loro competerà il titolo di derivati. Oltre i due accompagnamenti derivati, a cui serve di Basso la Terza, o la Quinta del fondamentale, avremo anche il terzo nascente dal porre nel Basso la dissonanza. Siccome quel suono, che nell'accompagnamento consonante fondamentale è o equisonanza, o consonanza perfetta, o imperfetta, ritiene la stessa natura negli accordi derivati; così la dissonanza aggiunta all'accordo fondamentale conserva la stessa indole negli accompagnamenti

Da ogni accordo dissonante fondamentale ne nascono tre derivati.

menti derivati, e se relativamente a quello era per esempio dissonanza privilegiata, si mantiene tale anche in riguardo a questi.

Ci insegna l'esperienza, che la Settima specialmente minore non vuol essere trattata con quel rigore, col quale si maneggiano le altre dissonanze Nona, Undecima, e Terzadecima. Per indagare di ciò la ragione, osservo che espressi i suoni per i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari, la ottima forma del perfettissimo consonante accompagnamento si è la seguente 1, 2, 3, 4, 5, 6. Abbiamo primieramente la Ottava indivisa 1 : 2, indi la Ottava 2 : 4 partita nelle due consonanze perfette, Quinta 2 : 3, Quarta 3 : 4 ambedue indivise. Segue il compartimento della Quinta 4 : 6 nelle due indivise consonanze imperfette, Terza maggiore 4 : 5, Terza minore 5 : 6. E qui ha termine il consonante accompagnamento, il quale nasce dalla doppia divisione della Ottava, e della Quinta effettuata colli ordine già descritto. Continuando un tal ordine, dovrebbe succedere la divisione della Quarta 6 : 8 nelle due ragioni 6 : 7, 7 : 8, indi quella della Terza maggiore 8 : 10 nelle due ragioni 8 : 9, 9 : 10, poscia quella della Terza minore 10 : 12 nelle due ragioni 10 : 11, 11 : 12, e finalmente quella dell'intervallo 12 : 14 nelle due ragioni 12 : 13, 13 : 14. Vedremo appresso il perchè sino a tanto

Si indaga la ragione, per cui la Settima è la più mite fra le dissonanze.

e non più abbiano da progredire i compartimenti. Ma conciossiaché le Dissonanze si debbono prendere dalla Scala del Modo, ed in questa sono già determinate le Divisioni dei mentovati intervalli, ne segue che di tali Divisioni dobbiamo necessariamente servirci.

Partisca il Sistema Diatonico la Quarta in una Terza, ed in una Seconda, e se la Terza è minore, e di più se cala un Comma, come succede nella Quarta collocata fra la Quinta e l'Ottava degli accompagnamenti fondati sulla quinta corda di amendue i Modi, ne risulta un suono, che al fondamentale corrisponde in Settima minore, e che si accosta tanto al suono 7, quanto basta perché nell'orecchio si risvegli di questo l'idea, e perché in grazia di tale approssimazione la Settima minore, e particolarmente la nominata goda nel Contrappunto moltissimi privilegi. Si noti che il sette è il primo numero impari dissonante immediatamente vicino al cinque ultimo numero impari consonante, e che dall'aggiungere la Settima minore all'accompagnamento per Terza maggiore, che naturalmente, o artifizialmente compete alla quinta corda del Modo maggiore, o minore, ne nasce l'ottimo dissonante accompagnamento dinotato dai numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Anche la Settima maggiore ha origine dalla Divisione, benché meno perfetta

La Settima divide Diatonicamente la Quarta.

Quando è minore si accosta al numero 7, e gode perciò molti privilegi.

Quale accordo di Settima minore sia distintamente privilegiato.

perfetta, della Quarta, e differendo dalla Settima minore per il minor Semituono, la rappresenta, e partecipa delle sue prerogative. La Settima Diminuita poi altro non è, che una Settima minore, la cui base si accresce per un minor Semituono.

La Nona, e l'Undecima dividono le due Terze componenti la Quinta, e la Terzadecima quella Terza, ch'è situata fra la Quinta, e la Settima.

Le divisioni diatoniche delle due Terze maggiore, e minore componenti la Quinta determinano la Nona, e l'Undecima, ed il partimento della Terza minore fra la Quinta e la Settima minore somministra la Terzadecima, la quale supponendo la Settima, o Decimaquarta minore unita all'accompagnamento consonante, produce un ottimo effetto, mentre con essa dissonanza congiungesi.

Il grado delle dissonanze dipende da quello degli intervalli divisi.

Sia prima conseguenza, che il grado delle dissonanze dipende da quello degli intervalli divisi; e quindi tocca il primo posto alla Settima, il secondo alla Nona, il terzo all'Undecima, e l'ultimo alla Terzadecima. La Settima è la sola privilegiata; perché sola nasce dalla divisione di una consonanza perfetta. Si deduce in secondo luogo, che debbono solamente considerarsi i compartimenti dei quattro nominati intervalli; a cagione che quattro e non più sono i suoni, che si possono aggiungere al consonante accompagnamento.

Ragione dei nomi assegnati alle dissonanze.

Non tralascerò di render ragione dei nomi assegnati alle dissonanze

dissonanza. La solita denominazione dello accompagnamento consonante di Terza, Quinta, e Ottava nella serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12. comincia dal numero quattro, relativamente a cui il cinque forma Terza, il sei Quinta, lo otto Ottava. I nomi adattati alle dissonanze si riferiscono allo stesso numero quattro: ed in fatti rispettivamente ad esso la dissonanza collocata fra il sei, e lo otto, e che altresì corrisponde in Terza, si deve chiamar Settima. Alle dissonanze poste fra lo otto e il dieci, fra il dieci ed il dodici competono i nomi di Nona, e di Undecima: e finalmente alla dissonanza situata fra il dodici e la Decimaquarta minore prossima al numero quattordici è dovuto il titolo di Terzadecima.

Se lo accompagnamento sia per Terza minore, ovvero consonante per sola rappresentanza, si verificherà ciò non ostante, che la Settima derivi dalla divisione della Quarta fra la Quinta e lo Ottava, che la Nona, e lo Undecima traggano l'origine dal partimento delle Terze inferiore e superiore componenti la Quinta posta al di sopra dello Ottava, e che finalmente la Decimaterza proceda dal dividere la Terza, per cui differiscono la Duodecima, e la Decimaquarta.

Le dissonanze procedono da divisioni analoghe alle descritte, anche quando lo accordo è per Terza minore, o consonante per rappresentanza.

Ora è tempo di esaminare un' altra teorica delle dissonanze

Si esamina, se la dissonanza

sostenuta

sostenuta da Uomini eccellentissimi nel Contrappunto, la quale stabilisce, che le Dissonanze derivino dalla proporzione geometrica, ed afferma essere dissonante quello accompagnamento, in cui si contengono due intervalli simili riferiti a suoni fra loro non equisoni. Per tal cagione gli accordi della Nona, e della Settima minore si debbono collocare fra i dissonanti, comprendendo quello due Quinte, una dell'accompagnamento consonante, e l'altra posta fra la Quinta e la Nona, ed questo due Terze minori, una dell'accompagnamento consonante, e l'altra situata fra la Quinta e la Settima minore.

derivino dalla ragione geometrica.

Il necessario requisito di essere generale certamente non compete alla teorica da me riferita. Si adopra in Musica come dissonante l'accordo di Terza, Quinta, e Settima tutte e tre diminuite, benchè in esso due proporzioni simili non si ritrovino. Si aggiunga la Nona minore all'accordo consonante o per Terza maggiore, o per Terza minore, e l'accompagnamento indubitatamente dissonante non conterrà veruna coppia di intervalli simili, essendo giusta la Quinta dell'accompagnamento consonante, e corrispondendo a questa la Nona minore in Quinta diminuita. Addiviene talvolta che si unisca l'Undecima superflua all'accompagnamento per Terza maggiore, e l'accompagnamento dissonante, che ne risulta, non racchiude

La teorica riferita non è generale.

simili

simili proporzioni. Nello accordo dello Undecima abbiamo due Quarte, una fra la Quinta e la Ottava, l'altra fra la Ottava e la Undecima. Nello accordo della Undecima superflua le nominate due Quarte sono differenti, cioè a dire la prima giusta, e la seconda superflua. Anzi egli è osservabile, che la Nona minore, e la Undecima superflua sono più piccanti della Nona, e della Undecima appunto per il motivo, che contengono due Quinte, e due Quarte dissimili, non potendosi negare, che dalla Quinta diminuita, e dalla Quarta superflua soprannominata non vengano rese più amare.

Oltre a ciò la teorica, di cui favello, non è atta a render ragione dello indole più o meno mista delle dissonanze. I suoni 1, 2, 3, 4, 5, 6 somministrano alla Musica lo ottimo consonante accompagnamento, quantunque in esso si contengano due Ottave 1 : 2, 3 : 6, che suoni non equisoni hanno per fondamento. Risponderanno, che questa è una prerogativa del Ottava, consonanza fra tutte la più squisita: ed io soggiugnerò, che ciò posto mi dovranno certamente concedere, che una Dissonanza riuscirà tanto meno piccante, quanto più semplici saranno le due simili proporzioni, che nello accordo dissonante sono rinchiuse. Quindi secondo la presente teorica, la migliore Dissonanza dovrebbe essere la Nona, la peggiore la Settima minore

Non è atta a render ragione del grado delle dissonanze.

minore; perchè quella due Quinte, e questa due Terze minori contiene: conseguenza sommamente alla pratica ripugnante. Conchiudasi, che non dalla ragione geometrica, ma dalla divisione dei quattro sopramentovati intervalli le Dissonanze traggon la origine.

Della preparazione della dissonanza.

La Settima, e specialmente la maggiore, ama di essere preparata, e ciò indispensabilmente richiedono la Nona, la Undecima, e la Terzadecima. S'ottiene questa preparazione, facendo che un suono consonante anche per rappresentanza, o dissonante privilegiato formi la dissonanza nel susseguente accompagnamento. In sì fatta guisa il suono dissonante è una continuazione del preparante; di modo che la dissonanza si introduce col mezzo dello Unisono, melodia fra tutte la semplicissima.

In quali tempi si possano preparare, ed introdurre la dissonanza.

Relativamente ai tempi della Battuta, ed alle divisioni di essi tempi, la dissonanza si può preparare in tre diverse maniere, cioè o preparare in tempo cattivo, ed introdurre in tempo buono, o preparare, ed introdurre in tempo buono, o preparare in tempo buono, ed introdurre in tempo cattivo. Chiarissimo è il paragone del tempo cattivo precedente col vicino tempo buono: perchè il primo è sostenuto dal secondo: quanto basta chiaro è

il

il paragone del tempo buono antecedente col susseguente; perché amendue si reggon da se: e finalmente men chiaro è il paragone del tempo buono col seguente tempo cattivo; perché questo non colli antecedente tempo buono, ma col susseguente, al quale si appoggia, si pone principalmente al confronto. Le dissonanze non privilegiate vogliono prepararsi nelle due prime maniere, importando assai che apertamente si conosca, che la dissonanza è una continuazione del suono preparante. La sola Settima minore, diminuita, e maggiore può essere preparata in tempo buono, ed introdotta in tempo cattivo.

Della risoluzione della dissonanza.

Egli è di uopo, che il sapore piccante della dissonanza sia gustato dall'orecchio sol di passaggio. In due modi si può levar via la dissonanza, o tramutando il suono dissonante continuato in consonanza, o in dissonanza privilegiata, o facendo che una parte del suono dissonante si trasferisca ad un altro, che sia o consonante, o dissonante privilegiato. Il primo modo, che può chiamarsi una rovesciata preparazione, non si deve abbracciare. Ed in fatti se la preparazione mitiga la dissonanza, l'operare tutto all'opposto dovrà maggiormente innasprirla. Devesi adunque dalla dissonanza far transito ad una consonanza, o ad una dissonanza privilegiata. Tra i movimenti derivati propri delle parti acute,

quelli

quelli di grado piacciono più all'udito, e perchè con pochissima alterazione si passa dall'uno all'altro accompagnamento, e perchè non essendoci suono veruno intermedio, che da un'altra parte possa esser toccato, segue con maggior suo diletto la traccia della cantilena. Due sono i passi di grado, uno all'insù, l'altro all'ingiù, ed atteso che il suono grave è più maestoso dell'acuto, e tiene nell'udito più degno posto, si dee preferire il passo all'ingiù, onde dalla Dissonanza si faccia passaggio ad un suono della stessa più grave, il quale sia o consonante, o dissonante privilegiato. Con tale artifizio si risolvono, come si esprimono i Musici, le Dissonanze.

Con quali passaggi si preparino, e si risolvano le dissonanze.

Semplicissimo è il metodo, col quale si determinano i passaggi tutti, che servono alla preparazione, ed alla risoluzione delle Dissonanze. All'accompagnamento di Terza, Quinta, e Settima si aggiunga una dissonanza, e posta questa nel Basso, colla stessa si paragonino i tre suoni consonanti, e la Settima; e gli intervalli che ne risultano, ci suggeriscono i passaggi tutti, coi quali la Dissonanza può prepararsi. I detti intervalli si accrescano per una Seconda, e i nuovi intervalli presi all'ingiù, o i loro compimenti all'Ottava presi all'insù ci danno i passaggi atti a risolvere la

Dissonanza

dissonanza. Di più se o l'equisonanza, o la consonanza perfetta, o l'imperfetta, o la dissonanza privilegiata forma colla dissonanza un determinato intervallo; il passaggio da un accompagnamento all'altro, le cui basi si corrispondano nel detto intervallo, prepara la dissonanza con quella tale o equisonanza, o consonanza perfetta &c., e lo stesso intervallo aumentato per una Seconda, e preso all'ingiù, ovvero il suo compimento all'Ottava preso all'insù ci addita il passaggio, col di cui mezzo si risolve la dissonanza in quella tale o equisonanza, o consonanza perfetta &c. Esempigrazia la Decima corrisponde alla Nona in Seconda, ed aggiungendo a questa un'altra Seconda, ne nasce la Terza. Ecco però col passaggio di Seconda all'insù la Nona si prepara colla Decima dell'accompagnamento antecedente, e col passaggio di Terza all'ingiù si risolve parimente nella Decima dell'accordo susseguente.

Quando si aggiunge all'accordo consonante o la Nona, o l'Undecima, o la Terzadecima, e si compone a sole quattro parti, si suole per lo più omettere quel suono, in cui si risolve la dissonanza, ed in riguardo all'Undecima, e alla Terzadecima anche i suoni equisoni al nominato, e perchè più chiaramente si discerna

Componendo a sole quattro parti, si omette spesso nell'accordo dissonante quel suono, in cui si risolve la dissonanza.

discerne la risoluzione, e perché risolvendosi spesso le predette dissonanze senza cangiare l'accordo consonante, hanno luogo in questo, seguita la risoluzione, un'equisonanza, una consonanza perfetta, ed una imperfetta. Se per esempio le parti acute toccheranno la Quinta, l'Ottava, e l'Undecima, dopo la risoluzione troveremo l'accompagnamento consonante formato colla Quinta consonanza perfetta, coll'Ottava equisonanza, e colla Decima consonanza imperfetta. In oltre tralasciando il predetto suono, non si sente quell'intervallo dissonante, in cui si corrispondono esso suono, e la dissonanza, la quale perciò riesce più mite.

Molti privilegi gode la Settima specialmente minore, e diminuita. Ho già detto, che la sola Settima si può preparare in tempo buono, introdurre in tempo cattivo. La Settima minore, e diminuita la possiamo usare senza preparazione, e la maggiore dai buoni Autori soltanto si pone in opera di posta e non preparata, quando una parte discende dall'Ottava alla nominata dissonanza. Qualunque parte, e per conseguenza anche il Basso può cangiando accompagnamento trasferirsi con un salto alla sopra tutte privilegiata Settima minore aggiunta all'accordo per Terza maggiore, cui serve di base la Quinta

Dei privilegi della Settima.

cordelli

dell'uno, e dell'altro Modo primitivo, il che per esempio succede nei passaggi C $\substack{5\\3}$ 7 $\substack{6\\4\\2}$, A $\substack{5\\3}$ D $\substack{6\\4\sharp\\2}$. È lecito con tutte e tre le Settime preparare, e risolvere una dissonanza; ma queste preparazioni, e risoluzioni effettuate colla Settima maggiore vogliono praticarsi assai di rado, e con molta cautela. Una Settima può servire ad un'altra di preparazione, e di risoluzione. La Settima minore unita all'accompagnamento per Terza maggiore fondato sulla quinta corda del Modo maggiore, o minore, e la Settima diminuita nell'accordo di Terza minore, Quinta, e Settima ambo diminuite corrispondente alla settima corda artificiale del Modo minore, e che nasce dall'accrescere per Semituono minore la base d'un accompagnamento di Terza maggiore, Quinta, e Settima minore possono prima d'essere risolte divenire talvolta consonanze vere; e più frequentemente consonanze per rappresentazione. Con tale artificio si introducono in Musica dei bellissimi passi come esempigrazia G♯ $\substack{7\\5\\3}$ A $\substack{6\flat\\4\sharp\\3}$ G♯ $\substack{6\\4\\3}$ derivato dal fondamentale G♯ $\substack{7\\5\\3}$ D♯ $\substack{7\\5\\3\flat}$ E $\substack{5\\3\sharp}$, in cui la Settima diminuita 7 del primo accordo diviene Terza diminuita nel secondo, ed è poi risolta nel terzo. È concesso parimente alla nominata Settima minore lo ascendere di grado, e il muoversi di salto, quando un'altra

altra parte riassuma la Settima stessa, e colla prescritta regola la risolva. Finalmente la detta Settima minore può salire per un Diesis, trasformandosi nel susseguente ~~accordo~~ accompagnamento in quarta corda artifiziale, la quale poi deve ascendere alla quinta corda, giusta il canone stabilito nel Libro secondo. Anche questo passo posto in opera a tempo e a luogo produce un ottimo effetto.

Delle dissonanze unite all'accordo consonante a due a due a tre a tre ed anche tutte quattro.

Le dissonanze si possono aggiungere all'accompagnamento consonante unite a due a due con sei diverse combinazioni, a tre a tre con quattro diverse combinazioni, ed anche tutte quattro, ma assai di rado. Per introdurre tutte e quattro le dissonanze servono i due passaggi di Seconda all'insù, e all'ingiù. Col primo passaggio si preparano la Settima, la Nona, l'Undecima, e la Decimaterza colla Ottava, colla Decima, e colla Duodecima, e colla Decimaquarta dell'accordo antecedente. Il secondo passaggio ci dà soltanto preparate la Nona, l'Undecima, e la Terzadecima coll'Ottava, colla Decima, e colla Duodecima del precedente accompagnamento; e perciò la Settima vuol essere introdotta di posta. Non si risolvano nel tempo stesso, ma bensì una dopo dell'altra le dissonanze

Regole per risolverle l'una dopo dell'altra.

che

che si corrispondono in Quinta, o in Seconda. Poco lodevole altresì è il risolvere unitamente le Dissonanze, che in Quarta si riferiscono: e quindi solamente frequentata si troverà la congiunta risoluzione delle Dissonanze, che formano Terza, o Sesta.

nel tempo stesso.

Determinati i Modi maggiore, e minore col corteggio dei loro derivati, gli accompagnamenti naturali, ed artificiali, che loro competono, i passaggi o propri dello stesso Tuono, o che si trasferiscono da Tuono a Tuono, e di più le Dissonanze tutte, che ai detti accompagnamenti aggiungere si possono, egli è di uopo assegnare le regole per concertare a più parti un passaggio fondamentale, e derivato.

Vuole il buon metodo, che si dia principio dalla forma degli armonici accompagnamenti, dei quali il passaggio è composto. Parlerò prima delle composizioni a quattro parti, indi dirò qualche cosa di quelle ad otto, a tre, a due.

Della forma degli accordi, e primieramente a quattro parti.

Non si possono sempre mettere in opera le migliori disposizioni degli accompagnamenti per Terza maggiore, e per Terza minore, perchè assegnato il miglior ordine all'accordo antecedente, richiede il moto semplice delle parti, che si muti forma nel susseguente, la quale non è l'ottima per conseguenza. Oltre a ciò se non si variasse la disposizione dei consonanti accompagnamenti, una

Non si può, e non si deve sempre usare l'ottima forma degli accordi per Terza maggiore, o minore.

tale

tale armonia soverchiamente uniforme sazierebbe ben presto l'udito. Contenendo l'accompagnamento consonante tre suoni non equisoni, e dovendo le composizioni a quattro parti riparare uno dei detti suoni, non vi ha dubbio, che riesca più perfetta la replicazione del suono fondamentale. Ciò posto, al Basso si riferiranno un'equisonanza, una consonanza perfetta, ed un'imperfetta, le quali possono ricevere sei diverse specie di disposizioni, secondo che al Basso stesso è immediatamente vicina o l'equisonanza, o la consonanza perfetta, o l'imperfetta, e secondo che delle due consonanze, che restano, l'una sia al di sotto, e l'altra al di sopra, o al contrario. In vece del Basso si trova nelle musiche composizioni talvolta replicata o la consonanza perfetta, o l'imperfetta, ed in tal caso ne sole diverse specie di disposizioni all'accompagnamento si adattano. Conciossiachè non è confacente al Basso la troppa frequenza degli accordi di Quarta e Sesta, sarà lodevole lo schivare nei Soggetti, e negli altri Contrappunti doppj all'Ottava la replicazione della consonanza perfetta, alla quale, trasportata, che sia nel Basso, il mentovato accompagnamento si riferisca.

La replicazione della loro base si preferisca a quella degli altri due suoni.

Quante specie di disposizioni possan ricevere.

Nei Contrappunti doppj all'Ottava non si replichi la Quinta.

Quantunque negli accompagnamenti consonanti derivati di Terza e Sesta, di Quarta e Sesta si possa replicare qualsivoglia

Degli accordi consonanti derivati, e della varia specie delle loro disposizioni.

voglia dei tre suoni non equisoni, pure quando non ci sia o qualche particolar ragione in contrario, o principalmente in riguardo all'accordo di Quarta e Sesta la obbligazione di Contrappunto doppio all'Ottava, si riuniene più frequentemente replicato il suono, che serve loro di Basso. Così i tre suoni acuti sono diversi, e non equisoni, ed in sei specie di combinazioni ordinarie si possono. Ripetuto in cambio del Basso un altro suono, abbiamo tre sole specie di disposizioni.

Quali suoni non sia lodevole il replicare.

Non ama d'essere replicato quel suono alterato naturale, o artificiale, la cui modificazione o ha cangiato in consonante per rappresentanza un accordo consonante, o ha reso più piccante un accompagnamento, ch'era consonante per rappresentazione: e la ripetizione d'esso suono dee tanto più evitarsi, quanto l'accordo è di più austera natura.

Degli accordi dissonanti, delle varie specie della loro disposizioni.

Gli accordi dissonanti fondamentali, e derivati saranno interamente compiuti, quando in essi abbiano luogo quattro suoni non equisoni, tre consonanti, ed uno dissonante. In ciascuno di questi accompagnamenti i tre suoni acuti si ordinano in sei differenti maniere. Se due suoni acuti si corrispondono in equisonanza, le specie delle disposizioni si ristringono a tre. Ho già detto trattando delle dissonanze, che quando si compone a quattro parti, si suole per lo più ommettere

quel

quel suono, nel quale si risolve la dissonanza, e spesso ancora i suoi equisoni negli accordi fondamentali della Undecima, e della Terzadecima.

Avvertenze necessarie nel disporre gli accordi.

Nel disporre gli armonici accompagnamenti bisogna aver mira all'estensione dei musici stromenti, e specialmente al comodo delle voci. Egli è di uopo guardarsi altresì di collocare in sito troppo grave le Seconde, e le Terze; perchè producono un battimento, che disturba il giudizio del senso, e di cui il celebre M. Sauveur ne ha scoperta la fisica ragione, che si legge riferita nell'Istoria dell'Accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1700.

Della forma degli accordi ad otto parti.

Le regole date per disporre a quattro parti gli accordi, s'adattano coll'aggiunta di alquante avvertenze anche alle composizioni ad otto parti, le quali altro non sono, fuorchè un aggregato di due cori a quattro parti. Piace molto all'orecchio che un dato accompagnamento nei due cori abbia diversa disposizione, e quand'anche talvolta l'ordine fosse lo stesso, il vario movimento delle parti fa sì, che nel susseguente accordo le due disposizioni sian differenti. Abbiamo più libertà di omettere qualche consonanza in un coro, allora che questa dall'altro coro è cantata. Scrivendo ad otto specialmente interviene, che si uniscano insieme la dissonanza, e quel suono in cui si risolve e per

la più quella è contenuta in un coro, e questo nell'altro.

Gli accompagnamenti consonanti, e dissonanti delle composizioni a tre parti si formano assegnando alle due parti acute altrettanti suoni scelti fra i tre, o più non equisoni, che nel compiuto accompagnamento hanno luogo; avuta per altro cura di non congiungere se non di rado la Terza, e le sue replicazioni colla Undecima, la Quinta, e le sue replicazioni colla Terza decima. I detti due suoni differenti (e tali debbon essere con somma frequenza) somministrano all'accompagnamento due diverse specie di disposizioni. Nell'accordo conseguente della Cadenza spezialmente finali le parti sogliono corrispondersi in equisonanza; il che si pratica anche nei componimenti a due parti, onde perfetta unità nell'armonia si contenga.

*Degli accordi a tre parti, e della varia loro disposizioni.*

Poco mi resta da dire intorno alle composizioni a due parti. Essendo gli accordi di due sole voci formati, egli è di uopo arricchirli quanto si può di armonia, non usando in tempo buono l'Ottava, o altra equisonanza, salvo che negli accompagnamenti fondamentali veramente consonanti, e questa ancor parcamente, eccettuati i primenti della Cadenza. E conciossiachè l'armonia malgrado la descritta cautela resta ancor povera, si pone riparo a tale disordine, facendo

*Degli accordi a due parti.*

*Giova che una parte, tocchi uno dopo dell'altro più suoni dello*

facendo che spesso una parte tocchi uno dopo dell'altro più suoni dello stesso accordo; il che rende sommamente vaghe sì fatte composizioni. Questo artifizio accresce vaghezza anche alle composizioni fornite di un maggior numero di parti.

stesso accordo.

La libertà, che ha una parte di trasferirsi da suono a suono spettanti allo stesso accordo, ottiene altresì il fine importante di rattenere la parte stessa dentro i prescritti confini, e di evitare certi movimenti poco frequentati, che ci conducono, come vedremo, da un accompagnamento all'altro.

Altre utilità del predetto artifizio.

Negli accompagnamenti consonanti per rappresentanza egli è molto lodevole schivare i passi di consonanza alterata. Sembrerebbe, che egualmente austeri dovessero riuscire due intervalli, che uniti insieme compion l'Ottava, cioè a dire la Quinta diminuita, e la Quarta superflua; la Quarta diminuita, e la Quinta superflua; la Terza diminuita, e la Sesta superflua: e pure ciò non è vero, trovandosi colla esperienza nella melodia i primi più miti dei secondi. Dopo varie meditazioni mi è riuscito finalmente di scoprire la ragione di questo curioso effetto. La Quarta superflua riceve anche il nome di Tritono, siccome uguale all'aggregato di tre Tuoni. La successione di tre Tuoni non può

È lodevole schivare i passi di consonanza alterata negli accordi consonanti per rappresentanza.

Ragione, per cui fra due passi, che uniti insieme compion l'Ottava, uno sia meno austero dell'altro.

dedursi

derivisi dai soli passi di Quinta, e di Quarta principalmente considerati nella origine dei due Modi maggiore, e minore, rendendosi necessario per ottenerla anche il passo di conseguenza dalla quarta alla quinta corda, o al contrario. La Quinta diminuita non è soggetta a questa imperfezione, venendo determinata col mezzo soltanto di movimenti fondamentali di Quinta, e di Quarta. Veggansi i sottoposti esempj

F G A B:   F E D C B

F$^{5}_{3}$ C$^{5}_{3}$ F$^{5}_{3}$ G$^{5}_{3}$.   F$^{5}_{3}$ C$^{5}_{3}$ G$^{5}_{3}$ C$^{5}_{3}$ G$^{5}_{3}$

Quindi ragionevolmente l'orecchio preferisca i passi di Quinta diminuita a quelli di Quarta superflua. Molto maggior durezza si sente nel movimento di Quinta superflua eguale a quattro Tuoni, di Sesta superflua eguale a cinque Tuoni; perciò non dobbiamo maravigliarci, se i loro compimenti all'Ottava, Quarta diminuita, e Terza diminuita riescono più trattabili. Negli accompagnamenti, in cui c'entra la Terza diminuita, è meno difficile il discendere, che l'ascendere per il detto intervallo. Dipende ciò dalla natura della quarta corda artificiale, che nella mentovata Terza tiene il posto inferiore, la quale corda è introdotta in Musica, acciocchè si ascenda immediatamente alla quinta.

Dai suoni dell'accordo consonante o realmente, o per

Dai suoni dell'accordo consonante e
44

rappresentanza

rappresentanza si può far transito alla Settima specialmente mi-nore, e diminuita, e da questa à predetti suoni, osservate per altro le regole da me antecedentemente spiegate. Noto che riesce meno sforzato il movimento di Settima diminuita di quello di Seconda superflua. Si dimostra una tal verità collo stesso metodo da me usato relativamente alla Quinta diminuita, ed alla Quarta superflua, conforme i seguenti esempj pongono in chiaro.

si può passare alla Settima, e al contrario.

Il passo di Settima diminuita è più mite di quello di Seconda superflua.

7 G#. 7 E D C B A G#.
D 3/5 E 3#. D 3/5 A 3/5 D 3/5 A 3/5 E 3# A 3/5 E 3#.

Posciachè abbiamo insegnato a disporre gli armonici accompagnamenti, inoltriamoci a dare le regole, per far transito dall'accompagnamento antecedente al conseguente di un dato passaggio. E supponendo primieramente, che i detti accordi sian consonanti; fatta la riflessione, che ciascuno contiene tre suoni non equisoni, agevolmente comprendo, che da qualunque suono dell'antecedente accompagnamento posso passare a qualunque suono del conseguente, e che perciò ho nove passi, che da un accordo all'altro mi guidano. Dei passi fondamentali ne ho abbastanza parlato, ed ora è tempo di trattare dei movimenti derivati, la perfezione dei quali, oltrechè ha relazione a quella del passaggio fondamentale, dipende da due elementi, e sono la qualità del passo

Regola per far transito dall'accordo antecedente al susseguente.

Nove passi guidano da un accordo consonante all'altro.

Il passo fondamentale, la melodia, e l'armonia, che hanno luogo nei passi derivati influiscono nella loro perfezione.

passo derivato di melodia, e degli armonici accompagnamenti corrispondenti ai due suoni, onde il passo stesso è formato.

In riguardo al primo elemento il passo è fra tutti il più perfetto, quando sono unisoni i due suoni, che lo compongono. Tocca il secondo posto ai movimenti, che ascendono, o discendono di grado; ed il terzo a quelli, che con un salto si trasferiscono da suono a suono. Trattando della Dissonanza ho indicata la ragione, per cui i passi derivati di grado si debbano preferire ai salti quantunque consonanti. Il Diesis, ed il b molle meritano i nomi di Unisono superfluo, e diminuito. Si considerano altresì come intervalli alterati la Seconda superflua, la Terza diminuita, la Quarta diminuita, e superflua coi loro compimenti all'Ottava: ed intorno lo usare piuttosto l'uno che l'altro dei rapporti, che uniti insieme formano Ottava, mi riferisco a ciò, che poco fa ho stabilito.

Ordine della perfezione di essi passi in riguardo alla melodia

In riguardo al secondo elemento ho già detto nel primo Libro, che più di tutti soddisfa all'orecchio l'accompagnamento consonante fondamentale, indi il derivato di Terza e Sesta, e poscia l'altro derivato di Quarta e Sesta. Quindi relativamente ai mentovati accordi avremo cinque classi di passi derivati; i quali scemano gradatamente di squisitezza

Ordine della perfezione dei passi derivati in riguardo all'armonia.

sitezza

sitazza; secondochè ai due suoni; che li formano, corrispondono le coppie di accompagnamenti Terza e Quinta, Terza e Sesta, o a rovescio; Terza e Sesta, Terza e Sesta; Terza e Quinta, Quarta e Sesta, o a rovescio; Terza e Sesta, Quarta e Sesta, o a rovescio; Quarta e Sesta, Quarta e Sesta.

*La stima d'un passo derivato dipende dalla unita considerazione degli esposti elementi.*

Alla unita considerazione degli esposti elementi si appoggia il giudizio della stima, che meritano i passi derivati da un dato fondamentale. Nei Bassi continui, in cui i migliori passi si collocano, si penerà molto a trovare (eccettuate qualche volta le Fughe) che di salto si faccia transito da un accordo di Terza e Sesta ad un altro di Quarta e Sesta, o a rovescio, o pure e di salto, e di grado da un accordo ad un altro tutti e due di Quarta e Sesta. Essendo le parti acute retta dal Basso, ammettono con minore ripugnanza i movimenti meno eleganti, massimamente quando si compone a molto numero di parti, e si ha la cura di adattarli alle parti di mezzo, che dalli orecchio sono meno notate dalle due estreme.

*Dei passi alterati di melodia, che derivano da un passaggio fondamentale formato di due accordi consonanti.*

Giudico necessario il far qualche riflessione sopra que' passi alterati di melodia, che derivano da un passaggio fondamentale formato di due accompagnamenti consonanti. Se il passaggio fondamentale si numera fra i migliori di Quinta, o di Quarta

o di Seconda all'insù, o di Terza all'ingiù, e che il movimento derivato spetti alla classe prima, o seconda, si potrà adoprar francamente, quantunque soggetto ad alterazione, purchè non ci sia qualche particolar ragione in contrario. Veggansi i sottoposti esempj di movimenti alterati $F^{5}_{3}$ $B^{6}_{3}$, $F^{5}_{3}$ $F\sharp^{6}_{3}$, $C^{6}_{3}$ $G\sharp^{6}_{3}$, che derivano dai passaggi fondamentali $F^{5}_{3}$ $G^{5}_{3}$ di Seconda all'insù, $F^{5}_{3}$ $D^{5}_{3\sharp}$ di Terza all'ingiù, $A^{5}_{3}$ $E^{5}_{3\sharp}$ di Quinta all'insù, o di Quarta all'ingiù. La accennata ragione in contrario ha luogo nel movimento $B^{6}_{3}$ $F^{6}_{3}$ derivato dal passaggio fondamentale $G^{5}_{3}$ $D^{5}_{3}$. È vero che il detto passo spetta alla seconda classe; ma non può negarsi altresì, che essendo la memoria, che resta del suono B, una Sesta dissonanza aggiunta al conseguente accompagnamento per Terza minore $D^{5}_{3}$, il movimento alterato B F non mostri a chiaro lume, che essa dissonanza corrisponde in Tritono alla Terza minore. Per tal cagione il nostro passo merita di essere escluso dalle regolate composizioni.

Quali si adoprino francamente.

I passi alterati, che derivando dai mentovati passaggi fondamentali appartengono alla classe terza, quarta, e quinta, vogliono adoprarsi con maggiore riserva, secondo che scemano di perfezione.

Quali si adoprino con riservatezza.

Che se i passi alterati derivano

Quali si pon=

rivano dai fondamentali o di Seconda all'ingiù, o di Terza all'insù, quand'anche non contengano qualche loro particolare difetto, sono di poco uso, benchè compētano alle classi prima, e seconda. Mi serva di prova la difficoltà di trovarli nei Bassi continui. Lasciati da parte i passi viziosi $B^{6}_{3}$ $F^{5}_{3}$, $G\sharp^{6}_{3}$ $D^{5}_{3}$ derivati dai fondamentali $G^{5}_{3}$ $F^{5}_{3}$, $E^{5}_{3\sharp}$ $D^{5}_{3}$ di Seconda all'ingiù, a cagione che mettono troppo in vista, che la ricordanza del suon antecedente forma col suono conseguente fondamentale Quarta superflua, chi incontrerà mai nei Bassi continui i movimenti $F\sharp^{6}_{3}$ $F\natural^{5}_{3}$, $D\sharp^{6}_{3\sharp}$ $D\natural^{5}_{3\natural}$ derivati dai passaggi fondamentali di Terza all'insù $D^{5}_{3\sharp}$ $F\natural^{5}_{3}$, $B^{5\sharp}_{3\sharp}$ $D\natural^{5}_{3\natural}$ ? Se rarissime volte si pongono in opera i passi predetti di Terza all'insù considerati unitamente, ed in corpo cor loro derivati, come ho fatto vedere nel Libro secondo, scarso altresì sarà l'uso dei passi che da essi derivano, e tanto più, quanto tali passi sono alterati.

gano in uso ancora più parcamente.

Finora ho supposto, che tutti e due gli accordi formanti un passaggio sien veramente consonanti: consideriamo adesso i passaggi, che contengono o un solo, o due accompagnamenti consonanti per rappresentazione.

Dei movimenti derivati dai passaggi, che contengono uno, o due accordi consonanti per rappresentanza.

L'orecchio non comprende chiaramente, che la Quarta alterata sia un rivoltamento della Quinta corrispondente

Non si conosce chiaramente essere la Quarta

corrispondente. Per la qual cosa i passi derivati della classi terza, e quarta, in cui ci entra un accompagnamento alterato di Quarta e Sesta, si usano senza molto riguardo, purchè ciò non venga proibito da qualche loro singolare imperfezione. Quindi non di rado ci si affacciano nei Bassi continui i movimenti $C^{\substack{3\\6\\4\sharp}}\ G^{\substack{5\\3}}$, $A^{\substack{3\\6\\4\sharp}}\ E^{\substack{5\\3\sharp}}$; $F^{\substack{3\\6\\4}}\ C^{\substack{5\\3}}$, $D^{\substack{3\\6\\4\sharp}}\ A^{\substack{5\\3}}$ derivati dalla Cadenza dalla quarta corda alla quinta $F\sharp^{\substack{7\\5\\3}}\ G^{\substack{5\\3}}$, $D\sharp^{\substack{7\\5\\3\natural}}\ E^{\substack{5\\3\sharp}}$, dalla settima corda alla ottava $B^{\substack{7\\5\\3}}\ C^{\substack{5\\3}}$, $G\sharp^{\substack{7\\5\\3}}\ A^{\substack{5\\3}}$, i quali con un salto di Quarta all'ingiù si trasferiscono da un accompagnamento di Quarta superflua e Sesta ad un accompagnamento realmente consonante di Terza e Quinta. All'antecedente accordo fondamentale suole aggiungersi la Settima, che diviene Terza relativamente al Basso continuo.

alterata viene rivoltamento della Quinta corrispondente.

Conciossiachè la Quinta superflua è un'armonia assai cruda, per lo più in cambio dell'accordo fondamentale di Terza maggiore e Quinta superflua si adopra il derivato di Terza maggiore e Sesta minore, ed introducendolo, e dallo stesso passando ad un altro, si praticano i movimenti più semplici. Più trattabile è la Quinta diminuita, che riconosce la prima sua origine dal Sistema Diatonico. Gradirà talvolta l'orecchio, che con un passo derivato di Quinta, o di Terza, o di Settima tutte e tre diminuite, ovvero di Diesis si faccia sentire

L'accordo di Quinta superflua, ed i suoi derivati richiedono i movimenti più semplici.

Talvolta con un passo derivato, ed alterato, si introduce uno degli accordi di

*Quinta diminuita.*

sentire uno degli accompagnamenti di Quinta diminuita, o un qualche loro derivato, conforme negli esempj che soggiungo apparisca. F$^{6}_{3}$ B$^{7\,5}_{3}$, A$^{6}_{3}$ D♯$^{5}_{3\sharp}$, A$^{6}_{3}$ D♯$^{7\,5}_{3\sharp}$, F$^{6}_{3}$ D♯$^{7\,5}_{3\sharp}$, F$^{5}_{3}$ D♯$^{5\,6}_{3\sharp}$ F$^{6}_{3}$ C♯$^{7\,5}_{3}$, F$^{6\,6}_{3}$ F♯$^{5}_{3}$. Si noti in questi esempj; che i salti di Quinta diminuita, di Terza diminuita, di Settima diminuita fanno per così dire toccar con mano, che i detti intervalli si insinuano preparati nel susseguente accompagnamento: e non si trascuri altresì di avvertire, che tutti i movimenti appartengono alla classe prima, o seconda.

*Cautele nel disporre a più parti i detti passaggi.*

Nel disporre a più parti i passaggi, di cui trattiamo, bisogna aver mira principalmente di scansare i movimenti, che troppo palesano le inverse preparazioni delle consonanze per rappresentanza, che contengono cattive relazioni, e che si oppongono al fine, per cui le corde artificiali sono state ammesse nel Contrappunto.

*Dei passi somministrati dalle dissonanze.*

Ogni dissonanza accoppiata colli accompagnamento consonante somministra un nuovo passo, e mentre introducesi, e mentre risolvesi. La melodia di Unisono introduce la dissonanza preparata, e quella di Seconda all'ingiù la risolve. Questa legge non patisce veruna eccezione relativamente alla dissonanze Nona, Undecima, e

Terzadecima.

Terzadecima. La Settima specialmente minore ci può dare più passi; imperciocchè una parte la può introdur preparata, e l'altra di posta; una parte la può risolvere, e l'altra muoversi o di grado all'insù, ovvero di salto, ovvero stando ferma cangiarsi in un'altra dissonanza. Non mi diffondo maggiormente su questo particolare, avendone espressamente parlato, quando ho trattato delle dissonanze.

Si proibiscono di seguito, Due Unisoni, Due Ottave, Due Quinte.

Egli è molto lodevole, che una parte passi da consonanza a consonanza di diverso genere. Così si schivano i due Unisoni, le due Ottave semplici, o duplicate, o triplicate &c., le due Quinte semplici, o coll'aggiunta di un'Ottava, di due Ottave &c., che sono vietate di seguito nel Contrappunto; perchè stante la lor perfezione, le parti non sembrano due, ma una sola. Questa legge vale non solo nelle Quinte degli accompagnamenti consonanti, ma ancora in quelle, per cui differiscono o una consonanza ed una dissonanza, o due dissonanze. Avverto che non si scanseranno i due Unisoni, le due Ottave, le due Quinte col frapporre in tempo cattivo di spezzatura un suono spettante al precedente accompagnamento. Nelle composizioni ad otto parti si permette, che i due Bassi passino, con movimenti contrarj uno di Quinta, l'altro di Quarta; uno di Quarta, l'altro di Quinta dall'Ottava all'Unisono, dall'Uni=

sono

sono all'Ottava, onde si seguiti=
no bensì due equisonanze, ma
fra loro dissimili. E' parimente
in qualunque composizione con=
cesso di far transito dalla Duo=
decima alla Quinta, o a rovescio.
Si praticano due Quarte di segui= to, purchè non mai al Basso, ma alle parti di mezzo si riferis= cano. Io quanto a me consiglie= rei ad evitarle più che fosse pos= sibile, non avendo per altro il coraggio di condannarle assoluta= mente. Non producono buon ef= fetto due Quinte di seguito, ben= chè dissimili, come sarebbe a dire una giusta, e l'altra diminuita. Si intenda ciò detto nella circos= tanza, che sieno veramente Quin= te relativamente al Basso fon= damentale. Se si concedono due Quarte giuste di seguito, molto più facilmente si permetteranno una Quarta giusta, e l'altra alte= rata. Noto finalmente, che si schivano quanto basta le due Quarte giuste, e le due Quinte dissimili di seguito, mettendo loro in mezzo in tempo cattivo di spezzatura una voce propria dell'antecedente accompagna= mento.

Come si debbano usar parcamente due Quarte di seguito.

Pongo fine al terzo Libro col trattare dell'unità delle musiche composizioni. Della unità in riguardo al Tuono, ed alla Misura ne ho già parlato nel primo Libro, ed ora rivolgo le mie riflessioni all'unità del subbietto, la quale consiste nella uniformità

Della unità delle musiche composizioni.

uniformità di alcuna brevi cantilene di facile rimembranza. Dal trasportare la stessa melodia in più Tuoni, e dal collocarla in siti analoghi della composizione, nasce l'unità di questa l'origine; e dal congruamente alternare le diverse cantilene, trae la sua origine la varietà. Un perito Maestro con pochi passi lavora una bellissima composizione; ed a rovescio un imperito né accumula un centone, che non può dilettare l'orecchio intendente; perché posto insieme senza ragione.

Delle Fughe, o Soggetti.

Nel Contrappunto, non altrimenti che nella Poesia, varj gradi di unità si ammettono, e più esatta di tutte si è quella delle Fughe, o Soggetti. In queste composizioni la guida, o la parte antecedente propone una cantilena appartenente ad un dato Tuono ordinata in maniera, che la risposta della parte conseguente, che comincia a cantare dopo qualche intervallo di tempo, rassomigli la proposta quanto è possibile senza uscire dal Tuono. Più magistrali debbonsi riputare i Soggetti, nei quali alla risposta si dà principio, mentre ancora la proposta continua; dovendo in essi essere tale la proposta, che si possa unire colla risposta. Terminata la proposta, e la risposta, ed essendo quattro le parti (numero, nel quale consiste la maggior perfezione di tali Contrappunti) si compongono altre

altre due cantilene, che unitamente alle mentovate formino quattro parti reali corrispondenti ad un Basso fondamentale.

Conciossiachè la proposta, e la risposta, e le nominate due cantilene debbono trasportarsi nel Basso, si abbia la avvertenza di schivare due Quarte di seguito, che rivoltate divengon due Quinte. Egli è di uopo altresì astenersi dal replicare la Quinta, acciocchè nel Basso non abbondino soverchiamente gli accordi di Quarta e Sesta. Per lo stesso motivo si tralascierà la Quinta meno di rado che la Terza in qualche accompagnamento. È da notarsi per altro, che aggiunta allo accordo di Quarta e Sesta la Terza, la quale è una Settima relativamente allo accompagnamento fondamentale, divide essa la Quarta, e la fa meno distintamente conoscere, che questa sia della Quinta un rivoltamento. Bisogna parimente per quanto si può guardarsi dal muoversi di salto, quando allo uno, o allo altro suono corrisponda lo accordo di Quarta e Sesta, ed anche di grado, quando lo stesso accordo ad ambedue i suoni si riferisca; imperciocchè questi passi, come ho considerato di sopra, mal volontieri si ammettono, secondo che sono più o meno imperfetti, nei Bassi continui.

Regole per concertare le Fughe.

Dal far passare le dette quattro cantilene da una parte alla altra, dipende della Fughe

Lo innaccio delle Fughe dipende dal far

tutto

tutto l'intreccio. Si corrispondono il Soprano, ed il Tenore; il Contralto, ed il Basso; perché a coppia a coppia cantano agevolmente gli stessi passi, uno all'Ottava alta, l'altro all'Ottava bassa. Se il Soprano, o il Tenore propone, risponde o il Contralto, o il Basso; ed al contrario se o l'una, o l'altra delle due ultime parti propone; risponda o l'una, o l'altra delle due prime. Egli é arbitrario il principiar con qualunque parte; ma per lo più precede il Soprano col Soggetto, succede il Contralto colla risposta, a cui vien dietro il Tenore col Soggetto, ed il Basso chiude l'ordine colla risposta. Mentre le parti entrate in terzo, ed in quarto luogo, dicono il Soggetto, e la risposta, le rimanenti due parti proferiscono l'altre due cantilene. Si modula poscia, se il Tuono é per Terza maggiore, al Tuono simile subordinato, cui serve di fondamento la corda quinta del principale, e fatti sentire a vicenda il Soggetto, e la risposta, al Tuono principale si fa ritorno. Passi dopo la modulazione al Tuono, che ha per base la quarta corda, ed anche in questo alternativamente si cantino dalle quattro parti la proposta, e la risposta: il che pure si adempia, allora che per compimento del Soggetto si ritorna al Tuono principale, e si ponga fine alla composizione con alquante Battute

di

passava la cantilena da l'una parte all'altra.

Ordine della modulazioni nella Fughe.

di conchiusione. Se il Tuono è per Terza minore, le modulazioni ai Tuoni subordinati fondati sulle corde quarta e quinta del principale meritano a un di presso eguale stima; come ho notato nel primo Libro; e quindi del pari lodevole è il dare il primo luogo o all'una, o all'altra modulazione. Prima che una parte replichi il Soggetto, o la risposta, si premette una pausa, acciocchè la detta replicazione sia più notata.

Unità stretta, e varietà sufficiente dei Soggetti.

I Contrappunti, dei quali parlo, maneggiati col metodo da me descritto, che ho dedotto dall'attenta considerazione di alcuni Soggetti favoritimi dal non mai abbastanza lodato P. M. Francescantonio Vallotti, accoppiano insieme stretta unità, e varietà sufficiente. Contengono stretta unità; perchè formati di quattro cantilene dedotte dallo stesso Basso fondamentale: contengono varietà sufficiente; perchè ogni parte successivamente intuona tutte e quattro le cantilene, facendosi continuamente transito dall'una all'altra. Nello stesso Tuono le parti corrispondenti cambiano la cantilena. Quella cantilena, che per esempio canta il Tenore, mentre il Soprano dice il Soggetto, la canterà il Soprano, mentre dal Tenore il Soggetto pronunciarassi. Quando poi si varia Tuono, le parti non corrispondenti permutano le clausole,

cantando

cantando il Soprano, o il Teno=
re quella, che diceva o il Contralto,
o il Basso; e così parimente
il Contralto, o il Basso quella,
che diceva o il Soprano, o il
Tenore.

Licenze, che si prendono i Compositori nel lavorare le Fughe.

So benissimo, che pochi
sono que' Compositori, che lavo=
rino le Fughe con tal rigore. E
primieramente conservano cos=
tantemente la melodia del Sog=
getto, ma non già l'armonia,
adattando, se loro torna a grado,
allo stesso Soggetto diversi Bassi
fondamentali con grave pregiu=
dicio dell'unità. Cadono in ques=
to errore, perchè non sono infor=
mati di tutti i maneggi alle par=
ti di mezzo, e rivoltamenti dei
musici accordi. In secondo luo=
go introducono con danno altre=
sì dell'unità dei passi stranieri
al Soggetto: cosa a dir vero
contraria all'indole austera
dei Contrappunti, dei quali par=
liamo. Egli è di uopo per altro
concedere di buon grado una tal
licenza a chi compone a due so=
le parti; riuscendo troppo stuc=
chevole la continua vicenda del
Soggetto, e della risposta: e
quindi con ragione ho detto,
che le Fughe dalle quattro parti
ricevono la loro maggior per=
fezione. Si fanno lecito in ter=
zo luogo di modulare ai Tuoni
subordinati, che non sono simili
al principale. Vedremo che i
due Modi per Terza maggiore,
e per Terza minore richiedono

Soggetti

Soggetti adattati alla loro natura, e che bene spesso quella, ch'è vera risposta nel Modo maggiore, non conservasi tale nel Modo minore, e al contrario; posto anche che il Soggetto possa trasportarsi da un Modo all'altro, il che in molte occasioni sarà vietato.

Del Sistema di Guido Aretino.

Ho detto che la risposta dee rassomigliar la proposta, quanto è possibile senza uscire dal Tuono. Per collocare nel dovuto lume un tal punto, mi sono riserbato di dire qualche cosa in questo luogo del Sistema di Guido Aretino. Meditando egli sopra il Diatonico degli antichi Greci, che oltre i suoni dinotati poscia colle lettere Gregoriane A, B, C, D, E, F, G comprendeva altresì il B♭, osservò in esso tre Esacordi simili G, A, B, C, D, E; C, D, E, F G, A; F, G, A, B♭, C, D, che chiamò per ♮ quadro, per natura, e per ♭ molle, e a ciascuno de' quali adattò le sei sillabe Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La prese dall'Inno di S. Giovanni. Gli Esacordi per natura, e per ♮ quadro appartengono al Tuono C per Terza maggiore, ovvero A per Terza minore; e similmente gli Esacordi per ♭ molle, e per natura competono al Tuono F per Terza maggiore, ovvero D per Terza minore. Io rivolgerò le mie considerazioni ai

due

due primi Esacordi, siccome spettanti ai Tuoni C maggiore A minore, modello e norma di tutti gli altri loro simili, che Tuoni trasportati deggionsi riputare, le quali si potranno interamente applicare ai due Esacordi per b molle, e per natura.

Legge delle risposte dei Soggetti.

Se la proposta, e la risposta non debbono uscire dal Tuono, egli è di uopo che si fermino dentro i confini dei due Esacordi per natura, e per ♮ quadro; imperciocchè se per esempio passassero all'Esacordo per b molle, abbandonerebbero o il Tuono C maggiore, o il Tuono A minore, e farebbero transito al Tuono F per Terza maggiore, ovvero D per Terza minore. L'uniformità della proposta, e della risposta dipende interamente dalla similitudine dei due Esacordi per natura, e per ♮ quadro, in virtù della quale i passi, che fa il Soprano, o il Tenore nel primo, o nel secondo Esacordo, si imitano perfettamente dal Contralto, o dal Basso nell'Esacordo secondo, o primo. Interviene pertanto frequentemente, che la proposta passi da un Esacordo all'altro, ed in questo caso la risposta dee trasferirsi all'Esacordo abbandonato dalla proposta. In si fatta guisa si ottiene il doppio effetto di non partire dal Tuono, e di poter imitare nel nuovo Esacordo i movimenti della proposta. Or ecco la legge generalissima delle risposte: se la proposta canta una corda del Esacordo

per

per natura, o per ♮ quadro, canti la risposta la corda corrispondente dell'Esacordo per ♮ quadro, o per natura. Sin tanto che sono simili i passi della proposta, e della risposta, e l'una, e l'altra persevera nel proprio Esacordo. Ma quando i due passi differiscono per una Seconda, egli è segno che si è fatta la permutazione degli due Esacordi. Per la regola data, se la proposta nel Modo maggiore modula dalla prima corda dell'Esacordo per natura, sulla quale è fondato il Modo, alla prima corda dell'Esacordo per ♮ quadro, ascendendo per una Quinta, la risposta dee modulare dalla prima corda dell'Esacordo per ♮ quadro alla prima corda dell'Esacordo per natura, ascendendo per una Quarta. Si osservi, che essendo seguito il cambio degli Esacordi, fra i due movimenti di Quinta, e di Quarta ci passa la differenza d'una Seconda.

I due Modi maggiore, e minore richiedono Soggetti adattati alla loro indole.

Ho promesso di far vedere, che i due Modi per Terza maggiore, e per Terza minore richiedono Soggetti adattati alla loro indole, e che bene spesso quella, ch'è vera risposta nel Modo maggiore, non conservasi tale nel Modo minore, o al contrario. E principalmente egli è infallibile, che un Soggetto, il quale produce ottimo effetto in un Modo, può nell'altro riuscire disaggradevole,

a cagione di alcuni passaggi, che trasportati da Modo a Modo, di grati ch'erano si cangiano in disgustosi: sopra di che mi rimetto a ciò che ho scritto nel Libro secondo. In secondo luogo la varia posizione degli esacordi per natura, e per ♮ quadro relativamente ai due Modi fa sì, che trasferita da Modo a Modo una risposta, contravvenga alle leggi, che sono state da me prescritte. Succederà ciò, quando si trasporti dal Modo maggiore al minore un Soggetto, nella cui proposta, e risposta c'entrino le corde seconde dei due esacordi, ovvero dal Modo minore al maggiore un Soggetto, in cui abbiano luogo le corde quinte. Per esempio la proposta A G F E, e la risposta E D C A, in cui c'entrano le quinte corde G, D degli esacordi per natura, e per ♮ quadro, si trasportino dal Modo minore al maggiore, e ci si presenteranno le due cantilene C B A G, G F E D, la seconda delle quali non è risposta della prima.

Quando una risposta trasferita da Modo a Modo contravvenga alla legge stabilita.

Ci sono parecchi Maestri, i quali quando la risposta comincia, finita che sia la proposta, tollerano ch'essa risposta esca fuori dal Tuono, per renderla più simile alla proposta; ed i più discreti si prendono questa libertà solamente nel mezzo della risposta, facendo che il principio, ed il fine della stessa corrisponda esattamente alla legge da me stabilita.

Licenze, che si prendono talora i Maestri nel comporre le risposte.

Componendo

componendo per voci della stessa specie, e che si riferiscono in Ottava, si trova spesso la risposta (se pure può dirsi tale) all'Unisono, o all'Ottava della proposta.

Molto maggior artificio richiedono le Fughe raddoppiate, che si compongono con un Soggetto con un Contrassoggetto, e colle loro risposte. Egli è necessario, acciocché l'orecchio distintamente si accorga del Contrassoggetto, che la cantilena di questo sia molto differente da quella del Soggetto. In sì fatta guisa l'intreccio delle magistrali composizioni, di cui parliamo, reca all'udito intendente un diletto non ordinario.

Dalla Fugha raddoppiate.

Si può altresì senza obbligo di risposta concertare insieme varj Soggetti, ciascuno adattato al sentimento delle parole, che ad esso si assegnano, e col loro maneggio condurre senza riempitura una bellissima composizione. Di questo genere se ne ritrovano molte nei riputatissimi Salmi del Signor Benedetto Marcello.

Del concerto di più Soggetti senza obbligo di risposta.

L'Imitazione, che parimente Fuga irregolare si appella, non si soggetta alla legge, che la guida, e la parte conseguente cantino corde simili dei due Esacordi; ma si contenta che l'una, e l'altra si movano per intervalli similmente denominati di Seconda, di Terza,

Dalla Imitazione.

Di

di Quarta, di Quinta &c., fra i quali ci può essere la differenza di un Semituono minore. Dovendo la proposta, e la risposta nei Soggetti cantare corde simili, è necessario che i suoni, da cui principiano, si corrispondano o in Quarta, o in Quinta, ed anche all'Unisono, o all'Ottava. La guida, e la parte conseguente delle Imitazioni, che non badano alla somiglianza delle corde, possono cominciare da suoni, che si riferiscano altresì in Seconda, in Terza, in Sesta, in Settima.

Del Canone.

Il Canone è una Imitazione, che continua per tutto il corso della composizione. Avremo una perfetta similitudine nelle cantilene dei Canoni alla Quarta, e alla Quinta (così si chiamano i Canoni, in cui i suoni relativi della guida, e del conseguente si corrispondono in Quarta, o in Quinta) se, non uscendo la composizione fuori del Tuono principale, la guida si fermerà sempre o nell'Esacordo per natura, o in quello per ♮ quadro, ed il conseguente o nell'Esacordo per ♮ quadro, o in quello per natura. Che se vorremo rendere i Canoni, di cui parliamo, più vaghi col mezzo della modulazione ai Tuoni subordinati, e far sì, che nelle loro cantilene si conservi esatta similitudine, dovremo osservar la legge, che si corrispondano nella guida, e nel conseguente

Condizioni necessarie, acciocché siano simili le cantilene dei Canoni alla Quarta, e alla Quinta.

gli

gli Esacordi per ♮ quadro, e per natura; per Diesis, e per ♮ quadro; per natura, e per b molle, o a rovescio. Quando adunque la guida, o il conseguente passa dall'Esacordo per ♮ quadro a quello per Diesis, il conseguente, o la guida deve far transito dall'Esacordo per natura a quello per ♮ quadro, e ritornando quella al pristino Esacordo, dee ritornarvi anche questo. Non altrimenti movendosi la guida, o il conseguente dall'Esacordo per ♮ quadro a quello per natura, dee moversi il conseguente, o la guida dall'Esacordo per natura a quello per b molle, e far poscia ritorno e l'una, e l'altro al primitivo Esacordo.

La particolare unità, di cui sono forniti l'Imitazione, ed il Canone, consiste nella uniformità delle cantilene, la quale quanto sarà più esatta, altrettanto più vigorosa si conserverà l'unità.

*Qual sia la particolare unità dell'Imitazione, e del Canone.*

Contrappunto doppio si chiama quello, in cui la parte acuta è in tal guisa composta, che si può trasportarla nel Basso. Ha il nome di Contrappunto doppio all'Ottava, alla Nona, alla Decima, alla Undecima, alla Duodecima, alla Decimaterza, alla Decimaquarta, secondo che si fa il transito per uno dei detti intervalli.

*Dei Contrappunti doppj.*

Quando

Grand'uso fa la Musica del Contrappunto doppio all'Ottava, e nelle Fughe, ed in altre moltissime circostanze. Trasportata la parte acuta nel Basso, si conserva la stessa melodia, e non si pone mano nell'armonia fondamentale, potendosi solamente cangiare l'accordo fondamentale in un suo derivato, o a rovescio, ovvero un derivato nell'altro derivato. Trattando delle Fughe ho date le leggi di questo Contrappunto, le quali si debbono osservare con tanto maggior rigore, quanto si compone a minor numero di parti. Servendo a due parti si introduca parcamente, e colle più eleganti maniere l'accompagnamento di Quarta e Sesta, massimamente quando le due parti toccan la Quarta, escludendolo dai siti principali della composizione, e singolarmente dal fine delle Cadenze, siccome quello, ch'è totalmente inetto a conchiudere.

*Del Contrappunto doppio all'Ottava.*

Delle altre sei specie di Contrappunti doppj, pensa doversene fare pochissima stima. E primieramente detratti i due all'Undecima e alla Duodecima, i rimanenti quattro variano la melodia, allora che si trasporta la parte acuta nel Basso. La melodia persevererà la stessa nel Contrappunto all'Undecima, se la parte acuta non escirà fuori dalle corde dell'Esacordo per natura

*Delle altre sei specie di Contrappunti doppj.*

*Si può conservare la stessa melodia solo nei Contrappunti doppj all'Undecima,*

natura; imperciocchè traspor- tata essa parte alli Undecima grave, toccherà le corde ana- loghe dell' Esacordo per ♮ qua- dro, e produrrà una melodia totalmente simile. Lo stesso seguirà nel Contrappunto dop- pio alla Duodecima, nel quale stando la parte acuta dentro i limiti dello Esacordo per ♮ quadro, conserverà trasferita una Duodecima all' ingiù la medesima melodia prodotta dalle corde simili dello Esacordo per natura. Che se la parte acuta nei mentovati due Con- trappunti non si fermasse den- tro gli stabiliti confini, fra la prima melodia, e la trasportata non ci potrebbe essere perfetta similitudine.

e alla Duo- decima.

Se in ciascuna delle sei specie di Contrappunti doppj, di cui faccio parola, al primo Basso, ed alla prima parte acu- ta corrisponde un Basso fonda- mentale, si cangerà totalmente il Basso stesso, trasportata che sia la parte acuta all' ingiù; e perciò i nostri Contrappunti non possono esser forniti di unità di armonia.

Le dette sei specie de Con- trappunti dop- pj non sono fornite di unità di armonia.

Col primo Basso, e colla prima parte acuta si concertino altre due cantilene, onde si ab- biano quattro parti reali, ed in- terverrà che seguito il trasporto, le due cantilene ripugnino alla nuova armonia; di modo che sia necessario il comporne altre due.

Nè meno di unità gene- rale di me- lodia.

due. Si cavi la conseguenza, che ai mentovati Contrappunti non può nè meno generalmente competere il pregio della unità di melodia.

Si aggiunga che non si può far uso di alcuna consonanza; perchè trasportata in parte grave divengono dissonanze. Mi serva di esempio il Contrappunto doppio alla Duodecima, che pure è migliore degli altri cinque. Pongo qui sotto le trasformazioni di tutti gli intervalli. I numeri superiori dinotano gli intervalli fra il primo Basso, e la prima parte acuta; ed i numeri inferiori gli intervalli fra il secondo Basso, e la seconda parte acuta unisona al primo Basso.

Non si possono usare alcuna consonanza, perchè effettuato il trasporto divengono dissonanze.

12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12
* *

In questo Contrappunto adunque ci è vietato il servirci delle consonanze Quarta, e Sesta, perchè dopo il trasporto si cangiano nelle dissonanze Nona, e Settima. La notata proibizione rende meno vaghe sì fatte composizioni, e perchè ~~ristrigne soverchiamente la libertà~~ impoverisce l'armonia, e perchè ristrigne soverchiamente la libertà, e la fantasia del Compositore.

Sogliono qualche volta i Maestri accrescere la unità della composizione con un andamento ostinato o nel Basso, o nelle parti acute. Ho detto che questo artifizio

Gli andamenti ostinati accrescono la unità della composizione.

artificio accresca la unità della composizione; imperciocchè esso non disobbliga le altre parti dalla dovuta corrispondenza di passi.

Per mettere elegantemente in Musica un Versetto, un' Aria, si inventino varie cantilene adattate ai sentimenti dell'uno, e dell'altra, e col maneggio di esse la composizione al suo termine si conduca. La introduzione poi ha da contenere il sugo, e la sostanza del Versetto, o dell'Aria, e fare lo stesso ufficio come l'esordio relativamente all'orazione.

Modo di comporre i Versetti, e l'Arie.

In somma qualunque sia la musica composizione, bisogna che i passi, ond'è formata, abbiano tale relazione e con essa, e tra loro, che con ragione quella tutto di conveniente unità dotato, e questi parti del medesimo tutto si possano nominare.

Conchiusione in riguardo alla unità delle musiche composizioni.

## Compendio del Libro quarto

Dei Temperamenti.

Siamo ormai giunti Sig.ri [illegible] novamente al quarto Libro, ed a prima giunta ci si affacciano i nuovi Temperamenti, i quali hanno la mira di distribuire a più intervalli, onde si renda poco sensibile, la differenza del Comma 80 : 81, per cui nel Diatonico sono troppo alterati alcuni intervalli consonanti. Questi compartimenti si chiamano anche Partecipazioni; perché col mezzo loro molti intervalli partecipano della differenza distributa del Comma.

Ragione, per cui rendesi necessario il Temperamento.

Se nei Modi maggiore, e minore s'usassero i soli accompagnamenti donde traggon l'origine, ed i loro derivati non ci sarebbe bisogno di Temperamento. Rendesi questo necessario, quando nel Modo maggiore si adoprano gli accompagnamenti del Modo minore relativo, o al contrario; avendo osservato nel Libro primo, che il secondo suono del Modo per Terza maggiore, ed il quarto del Modo relativo per Terza minore discordano per il Comma. ~~Differiscono altresì per~~ Si trova parimente la stessa differenza fra varie coppie di suoni, che si suppongono unisoni, l'uno proprio del Tuono principale e l'altro di qualche subordinato, che altera col Diesis, o col Bmolle una corda del Tuono principale.

Osservando

Principj per istabilire rettamente la teoria dei Temperamenti.

Oltremodo varj sono i giri di raziocinio, che hanno guidati i Maestri alla teoria dei Temperamenti. Se pure non prendo errore, il metodo che io propongo tende immediatamente al fine, ed è dimostrativo. Premetto alcuni principj.

Nei Temperamenti si deve aver mira alle sole consonanze, da cui le dissonanze debbono interamente dipendere.

Le consonanze vogliono essere alterate in proporzione dei numeri impari maggiori, che hanno luogo nei loro rapporti; cioè a dire tanto meno, quanto esse consonanze sono più semplici. Paragonate insieme due consonanze una perfetta, e l'altra imperfetta, e stante che il numero impari maggiore nelle consonanze perfette si è il 3, e nelle imperfette il 5, le minime loro modificazioni dovranno stare come 3 : 5, e colpiranno egualmente l'orecchio.

Le equisonanze, cioè a dire, oltre l'Unisono, l'Ottava semplice, e le replicate non vanno nè punto, nè poco modificate. Nasce una tal legge dalla natura delle equisonanze, contenenti il solo numero impari uno, la quale richiede, che per la stessa differenza si debbano alterare l'Ottava semplice, la duplicata, la triplicata &c: il che non si può generalmente ottenere, se non mantenendo

tutte

tutte le Ottave giuste.

Dal doversi conservare intatte le equisonanze, ne segue che per quella stessa porzione di Comma, per cui cresce o cala un dato intervallo, deve tutto a rovescio calare o crescere il suo compimento all'Ottava.

Addito ora tre diversi fonti di ragionevoli diavvenimenti, fra le quali l'ottima si pone di mezzo. E primieramente tre Quinte formano una Sesta maggiore sopra l'Ottava, che cresce per il Comma: ma la Sesta maggiore sopra l'Ottava, e la Terza minore compongono due Ottave; dunque tre Quinte, ed una Terza minore, l'aggregato delle quali cali un Comma, formano due Ottave. Diviso il Comma in quattordici parti eguali, e scemata ciascuna Quinta per $\frac{3}{14}$, e la Terza minore per $\frac{5}{14}$, le alterazioni di esse consonanze, una perfetta, e l'altra imperfetta stanno in ragione di 3 : 5 conforme la regola stabilita. Agevolmente si scopre, che la Terza maggiore nel nostro Temperamento dee crescere per $\frac{2}{14}$ di Comma. In fatti essendo la Quinta composta delle due Terze maggiore, e minore, il suo decrescimento $\frac{3}{14}$ si eguaglia al decrescimento $\frac{5}{14}$ della Terza minore, detratto l'

Tre Quinte, ed una Terza minore debbono formare due Ottave

Ottima Divisione del Comma fra tre Quinte, ed una Terza minore

aumento

aumento $\frac{2}{14}$ della Terza maggiore. Le alterazioni della Quarta, della Sesta maggiore, e della minore sono eguali, e contrarie a quelle della Quinta, della Terza minore, e della maggiore, di cui son complementi all'Ottava.

Abbraccierebbe uno dei Temperamenti ricordati da Giuseppe Zarlino chi distribuisse egualmente il Comma fra le tre Quinte, e la Terza minore, di modo che ciascuna di esse calasse $\frac{1}{4}$ di Comma, e la Terza maggiore si mantenesse nella sua giusta misura. È difettoso questo compartimento, perchè il minoramento della Quinta punge più le orecchie di quello faccia il più scemamento della Terza minore.

Temperamento ricordato da Giuseppe Zarlino.

Conciosiachè ognuna delle tre mentovate Quinte si può dividere nelle due Terze maggiore, e minore, ne segue che tre Terze maggiori, e quattro minori, il cui aggregato cale per un Comma, compongono due Ottave. Essendo tanto la Terza maggiore, quanto la minore consonanze imperfette, deve il Comma dividersi in sette parti eguali, e scemarsi per $\frac{1}{7}$ di Comma la Terza maggiore, e minore. Questo Temperamento di cui fa segnatamente menzione Giuseppe Zarlino, minora la Quinta $\frac{2}{7}$ di Comma.

Tre Terze maggiori, e quattro minori debbono formare due Ottave

Ottimo compartimento del Comma fra le sette Terze mentovato altresì dal Zarlino.

Se da quattro Quinte si

sottri

sotto il Comma, ne proverrà la Terza maggiore al di sopra di due Ottave: ma unendo a questo intervallo la Sesta minore si compie la terza Ottava; dunque quattro Quinte, ed una Sesta minore, la somma delle quali decresca un Comma, formano tre Ottave.

*Quattro Quinte ed una Sesta minore debbono comporre tre Ottave.*

Acciocchè la Quinta consonanza perfetta, e la Sesta minore consonanza imperfetta calino in proporzione di 3 : 5, egli è di uopo dividere il Comma in 17 parti eguali, onde ciascuna delle quattro Quinte cali $\frac{3}{17}$ di Comma, e la Sesta minore $\frac{5}{17}$. La Terza maggiore suo compimento alla Ottava crescerà per altrettanto, ed il minoramento della Terza minore ascenderà ad $\frac{6}{17}$.

*Ottima distribuzione del Comma fra i detti cinque intervalli.*

Chi non volesse aver riguardo alla semplicità dei cinque intervalli componenti le tre Ottave ricaderebbe nella Partecipazione, che scema la Quinta e la Sesta minore per $\frac{1}{5}$ di Comma, e la Terza minore per $\frac{2}{5}$, giudicata ottima dall'altre volte lodato M. Sauveur.

*Temperamento giudicato ottimo da M. Sauveur.*

Lascio di considerare, che tre Quarte, ed una Sesta maggiore coll'aggiunta di un Comma formano due Ottave, che tre Seste minori, e quattro maggiori ~~formano cinque~~ più un Comma formano cinque Ottave, e che molto parimente il Comma a quattro Quarte

*Non si considerano altre tre formazioni di Ottave, perchè nulla ci danno di nuovo.*

Quarta, e ad una Terza mag-
giore; ne risultano due Ottave;
imperciocché ne nascono gli stessi
tre Temperamenti, che distribui-
scono il Comma fra tre Quinte
ed una Terza minore, fra tre
Terze maggiori, e quattro minori,
fra quattro Quinte, ed una Sesta
minore.

Scelta dell'ottimo Tempe-
ramento

Fra i detti Temperamenti
egli è di uopo prescegliere quello
che sta di mezzo fra gli altri
due, e che contenendo la più
perfetta distribuzione del Comma
in riguardo a tre specie di
intervalli, ed ai loro compi-
menti all'Ottava, si adatta
nella più armonica possibil guisa
alle rimanenti due Propor-
zioni, dalle quali si trova
egualmente distante. Il primo
Temperamento, che scema la
Quinta per $\frac{3}{14}$ di Comma, è
medio fra il secondo, che la
scema per $\frac{2}{7}$, e fra il terzo,
che la scema per $\frac{3}{17}$. Osservo
che il secondo Temperamento
per servire esattamente alla
mutua aggiustatezza delle due
Terze maggiore, e minore,
cala soverchiamente la Quinta
per $\frac{2}{7}$ di Comma. Tutto al
contrario il terzo Temperamento
per accuratamente adattarsi
alla vicendevole accordatura
della Quinta, e della Sesta
minore, scema troppo la Terza
minore per $\frac{4}{17}$ di Comma.
Ciò che dico di un intervallo
si applichi ai suoi compimenti

al-

alle Ottava, i quali del pari ma contrariamente vanno alterati. Le soverchie alterazioni di $\frac{2}{7}$ di Comma nella Quinta, di $\frac{6}{17}$ nella Terza minore sono proporzionali alla indole di dette consonanze perfetta, ed imperfetta, stando prossimamente tra loro come i numeri impari 3 e 5: conforme il secondo principio sopra stabilito. Si cavi la conseguenza, che essendoci tre consonanze da temperare con i loro compimenti alle Ottava, la Partecipazione seconda, e terza badando unicamente a due consonanze, peccano proporzionatamente in modificare troppo quella, che rimane. Non interviene così nella prima Partecipazione, che avendosi la unica mira di ben distribuire il Comma fra la Quinta, e la Terza minore, la consonanza che rimane, cioè la Terza maggiore, unita a cui la Sesta minore compie l'Ottava o ne prova vantaggio, o non ne riceve discapito. Ne prova vantaggio relativamente alla terza Partecipazione; perciò riduce l'accrescimento della Terza maggiore da $\frac{5}{17}$ di Comma ad $\frac{1}{7}$. Non riceve danno relativamente alla seconda Partecipazione; perché scemando questa la Terza maggiore, ed $\frac{1}{7}$ di Comma, la prima, ed ottima Partecipazione l'aumenta per altrettanto

Quindi

Regola per fare la detta scala.

Quindi si può stabilire la regola facile per determinare l'ottimo Temperamento. Ottimo Temperamento si è quello, che proporziona il divario della Quinta, o della Quarta colla maggiore differenza, che altri le consonanze imperfette. Ora le tre nostre Distribuzioni, che distribuiscono perfettamente il Comma in riguardo a due consonanze, ed à loro compimenti alle Ottava, ~~i meno~~: non contiene ~~vali Divari non si trovano proporzionati salvo che nella prima si trova questa proprietà~~ salvo che ~~nella~~ prima, la quale è la migliore per conseguenza. Se le differenza della Quinta, e della Terza minore sono ottimamente proporzionate, nulla importa che sia minore di entrambe quella della Terza maggiore. Lo stesso dirassi dei loro compimenti alle Ottava. Il senso resta disgustato dalle grandi, e non dalle piccole alterazioni.

Dei sistemi temperati generali.

Quantunque i Sistemi temperati generali non vengano ad uso, non vo' lasciare di farne brevemente parola. Requisito essenziale dei Sistemi generali temperati si è, che a qualunque suono corrispondano gli intervalli tutti, di cui si serve la Musica, i quali sempre dalla medesima Distribuzione sien regolati: Per ottenere l'intento egli

è

è di uopo stabilire una sem=
plice proporzione espressa in
numeri interi relativamente
primi fra le grandezze dei
due Semituoni maggiore, e
minore. Assegnato ad essi
Semituoni quel numero di
parti eguali, che la stabilita
proporzione richiede, ne segue
che l'Ottava composta di sette
Semituoni maggiori, e di cinque
minori si divide in un dato
numero di parti eguali. Si
partisca per un tal numero
il logaritmo dell'Ottava, e
ne risulterà il valore di una
parte, il quale moltiplicato
per i numeri esprimenti
la relazione fra i Semituoni
maggiore, e minore, ci darà
la grandezza dei detti Semi=
tuoni partecipati. E stante
che tutti gli intervalli musici
sono formati di Semituoni,
sarà facile il ritrovare i
Logaritmi degli intervalli
temperati. Dongasi al parа=
gone col Logaritmo del Comma
la differenza fra l'intervallo
giusto, e il partecipato, e si
saprà per quale porzione di
Comma questo cresca, o de=
cresca.

Del Sistema generale di 12 Semituoni.

I Semituoni maggiore, e minore si riferiscono in
una proporzione media fra
le due semplicissime 1:1, 2:1.
Supponiamo primieramente

aguali

eguali i due Semituoni di diversa specie, onde l'Ottava dividesi in dodici Semituoni medj. Effettuati i computi, dai quali ho parlato, si scoprirà che calare la Quinta per $\frac{1}{11}$ di Comma, e la Terza minore per $\frac{6}{11}$, e che la Terza maggiore cresce per $\frac{7}{11}$. Il Sistema generale di dodici Semituoni è quello unico, che si possa addattare agli Organi, e ai Gravicembali, i quali contengono dodici tasti per Ottava. Nulladimeno però tratta così male le consonanze imperfette, che non ha trovato Accordatore, che se ne serva.

Sistema generale di 19 parti.

L'altra supposizione, che determinando i Semituoni maggiore, e minore in ragione di 2:1, divide l'Ottava in 19 parti, cade nel difetto opposto, scemando la Quinta soverchiamente per $\frac{1}{3}$ di Comma, lasciando intatta la Terza minore, e calando la Terza maggiore quanto la Quinta.

Sistema generale di parti 31 inventato da Cristiano Ughenio.

Agevolmente si comprende, che la più semplice ragione media fra le due di limite 1:1, 2:1, cioè a dire la ragione 3:2, in cui si corrispondano i Semituoni maggiore, e minore partecipati, si dee condurre ad un assai buono temperamento. La proporzione 3:2 fra i nostri

Semituoni

Semituoni divida l'Ottava in parti 31 : Sistema generale inventato dal famoso Cristiano Ugenio. Abbraccia esso ~~la migliore~~ prossimamente la migliore delle due Partecipazioni ricordate da Giuseppe Zarlino, siccome quello che cala la Quinta qualche cosa meno, e la Terza minore qualche cosa più di $\frac{1}{4}$ di Comma, e mantiene pressochè nella sua giusta misura la Terza maggiore.

Invenzione di un Sistema, che ci guida al generale di parti 31.

Non voglio omettere di dare un cenno di una mia curiosa scoperta. Preso un suono siccome base, ad esso si riferiscano le proporzioni tutte, che stanno dentro i limiti dell'Ottava, e non comprendono numero impari maggiore del sette. Ad ognuno dei suoni in tal guisa determinati corrispondano tutti i predetti intervalli, e degli intervalli indi nascenti, quindi ~~quelli, che~~ escono fuori dai confini dell'Ottava, si sottri l'Ottava stessa. Ciò fatto, si troverà l'Ottava divisa in 31 elementi, 19 di una specie, e 12 dell'altra, che dovrebbero chiamarsi Seconde una volta, e due volte diminuite. Gli elementi della stessa specie hanno diversi valori, ed essendo fra i valori degli elementi della prima specie ~~di ciascuna specie ora maggiori, ed ora minori di~~ alcuni maggiori, ed altri minori di un dato valore degli elementi

della

Della specie seconda, cade tosto in pensiero di supporre eguali con elementi di varia specie, onde in 31 parti eguali si divide l'Ottava. In fatti la supposizione è tanto aggiustata, che la maggiore alterazione dei nostri rapporti, che non ammettono il numero primo maggiore del sette, cade sopra la Terza minore, e supera per una minimia la quarta parte del Comma.

Assegnata alle grandezze dei due Semituoni temperati la proporzione ~~più sem~~ 5:3, che è la più semplice media tra le due 3:2, 2:1, 4 si presenta il Sistema generale scoperto dal celebre Sig.r Henfling, e pubblicato nelle Miscellanee di Berlino dell'anno 1710, che in 50 parti eguali divide l'Ottava. ~~Abbraccia esso una Dazzeryazione~~ Il Temperamento ricavato da questo Sistema si accosta molto al nostro secondo, scemando la Quinta una minimia meno di $\frac{2}{7}$ di Comma, la Terza minore alquanto ~~meno, e più, e la Terza maggiore alquanto meno di $\frac{1}{7}$~~ più di $\frac{1}{7}$, ed alquanto meno la Terza maggiore.

Sistema generale di parti 50 scoperto dal Sig.r Henfling.

Nasce il Sistema, che divide l'Ottava in 43 parti eguali, della invenzione del quale

Sistema generale di parti 43 inventato da M. Sauveur.

quale siamo debitori a M. Sauveur, dal prendere la più semplice proporzione media, fra le due 1 : 1, 3 : 2, cioè a dire 4 : 3, e per ciò che in essa le grandezze dei due Semituoni temperati si riferiscano. Adotta questo Sistema prossimamente la Partecipazione, che cala la Quinta, e accresce la Terza maggiore $\frac{1}{5}$ di Comma, e scema il doppio la Terza minore.

Avremo il Sistema dividente l' Ottava in 55 parti eguali, prendendo fra le due ragioni 1:1, 4:3 la media più semplice 5 : 4 la quale dia regola alle relative grandezze dei Semituoni temperati. Si appropria esso la nostra terza Partecipazione, che scema la Quinta $\frac{3}{17}$ di Comma, accresce la terza maggiore $\frac{5}{17}$, e fa che cali la Terza minore $\frac{6}{17}$.

Sistema generale di parti 55.

Chi avesse in animo di scoprire quel Sistema generale, che ammette il nostro primo ottimo ~~Parte~~ Temperamento, dovrebbe stabilire le grandezze dei Semituoni partecipati in ragione di 7 : 5, e dividere l' Ottava in 74 parti eguali.

Sistema generale di parti 74. che ammette l'ottimo Temperamento.

Ho già detto, che in pratica i Sistemi temperati generali non vengono ad uso. Volendo additare

Ragione, per cui i Sistemi temperati generali non vengono ad uso.

adattare un Sistema generale ad uno Stromento, bisogna fornirlo di tante corde, o suoni dentro i limiti di un' Ottava, quante sono le parti, nelle quali il Sistema generale distribuisce l' Ottava stessa. Chi s'immaginerà mai di lavorare un Organo, o un Gravecembalo di 74, di 55, di 50, di 43 tasti per Ottava?. Di uno Stromento di 31 tasti per Ottava, opera del Signor Nigetti Fiorentino, ne fa menzione il Signor Co. Lorenzo Magalotti (a). Ma questi sono Stromenti da galleria, dei quali basta che persona, che si abbia molto studiato sopra, ne faccia sentire la sua accordatura, e buona consonanza. Sino al Zarlino erano noti gli Stromenti di 19 tasti per Ottava, i quali sono stati posti in non cale per la loro troppa difficoltà. Comunemente adunque non si adoperavano molti, salvo che gli usuali Organi, e Gravecembali di 12 tasti per Ottava, che si potrebbero accordare secondo il Sistema di 12 Semituoni. Ma conciossiachè il Temperamento del mentovato Sistema riesca soverchiamente piccante, i Pratici prescelgono una ineguale accordatura, di cui mi accingo a trattare, la quale fa che tutti i Tuoni, che si chiamano o per terza maggiore, o per

(a) Lettera scientifica VIII.

o per Terza minore, producano nelli orecchio differente impressione.

Importa moltissimo al Contrappunto lo esaminare accuratamente la indole, e la proprietà dei nostri Stromenti da tasto, acciocchè si sappia qual sorta di armonia, e di melodia si abbia sotto le dita per farne poi quello uso opportuno, che la mozione dei varj affetti richiede. Colla seguente serie di undici Quinte

E♭. B♭. F. C. G. D. A. E. B. F♯. C♯. G♯

si determinano le vere denominazioni ad ogni tasto convenienti, e conseguentemente la Scala dei comuni Stromenti

C. C♯. D. E♭. E. F. F♯. G. G♯. A. B♭. B. C

~~Stante~~ Conciossiacosachè riesca troppo pesante la loro eguale accordatura, egli è di uopo migliorarla in riguardo ai tasti bianchi, che molto più frequentemente dei neri si adoprano. Per allontanarsi meno che sia ragionevolmente possibile dal Sistema di 12 Semituoni, si faccia scelta della nostra terza Partecipazione, che proporziona le differenze della Quinta, e della Terza maggiore, scemando le sei Quinte composte di dieci tasti bianchi si fattamente, che lo orecchio egualmente si

accorga

Della ineguale accordatura degli Stromenti da tasto.

Scala dei detti Stromenti

La nostra terza Partecipazione regola la accordatura dei tasti bianchi.

accorga del loro decrescimento, e della aumentazione delle Terze maggiori parimente di due tasti bianchi formate. Ma, perchè continuando questo Temperamento anche nelle cinque Quinte, in cui hanno luogo uno, o due tasti neri, l'intervallo G♯ E♭, che mutato nome al tasto inferiore, o al superiore si adopra come Quinta A♭ E♭ ovvero G♯ D♯, crescerebbe quasi un Comma sopra la ragione 2 : 3, e riuscirebbe insoffribile all'orecchio; relativamente ad esse Quinte si cangia Partecipazione, e si accordano meno calanti. Abbia mira l'Accordatore di temperarle in maniera, che ~~la Sesta maggiore B G♯~~ la Quinta G♯ D♯, e la Sesta maggiore B G♯ pizzichino egualmente l'udito; il che interverrà, quando le cinque nominate Quinte calassero per l'undecima parte in circa del Comma. In tale circostanza mi insegnano i computi, che crescono la Quinta G♯ D♯ per $\frac{3}{7}$ di Comma, e la Sesta maggiore B G♯ per $\frac{5}{7}$. Accostate più al giusto le cinque Quinte, si sconcerterebbe vie più la Sesta maggiore B G♯, e calandole di più, si aumenterebbe l'accrescimento della Quinta G♯ D♯: e quindi sembrami, che

(·) i tasti neri si accordino giusta il Sistema di 12 Semituoni.

che l'ineguale Partecipazione da me proposta sia la migliore, che ai comuni Istrumenti da tasto adattar si possa.

La cinque Quinte, in cui hanno luogo uno, o due tasti neri, calano meno di quelle che di due tasti bianchi sono formate, per la duodecima parte del Comma adequatamente. Relativamente adunque alla più perfetta Partecipazione dei tasti bianchi crescono F# $\frac{1}{12}$ di Comma, C# $\frac{1}{81}$, G# $\frac{1}{4}$; ed al contrario calano B♭ $\frac{1}{12}$ di Comma, E♭ $\frac{1}{81}$. Non può abbastanza ammirarsi la finezza del nostro orecchio il quale distinguendo l'uno dall'altro i Tuoni o per Terza maggiore, o per Terza minore, che lasciano ai tasti il loro vero nome, si accorge delle notate minuzie di Comma.

Quando crescano i tasti Diesis e calano i neri le quinte relativamente alla Partecipazione dei tasti bianchi.

Che se E♭. B♭. F. C G si adoprano come D#. A#. E#. B# Se questi suoni crescono sopra gli analoghi della mia terza Partecipazione per molto maggiori differenze, cioè a un di presso D# per $\frac{5}{81}$ di Comma, A# per $\frac{11}{12}$, E#, B# per un Comma. #

Quanto crescano i Diesis, e calino ~~[illegible]~~ i bemolli proporzionatamente tali relativamente alla accordatura dei tasti bianchi.

Posti in opera G#. C#. F#. B e E in figura di A♭. D♭. G♭

$G^b$. $C^b$. $7^b$ Ge sono più gravi dei suoni analoghi della detta Partecipazione, $A^b$ circa $\frac{3}{7}$ di Comma, $D^b$ $\frac{5}{81}$, $G^b$ $\frac{11}{12}$, $C^b$, $7^b$ un Comma all'incirca. Da queste molto sensibili alterazioni ricevono parecchi Tuoni un loro particolare carattere, del quale fra poco farò parola.

Fra le molte prerogative onde si adorna la Musica, per universale consenso occupa il primo posto la facoltà, che in essa risiede, di imitare il senso delle parole, e colla imitazione risvegliare nello animo i varj affetti. Se badiamo agli antichi Greci, ci narrano succelli prodigiosi cagionati dalla lor Musica. Spogliati che siano i mentovati racconti dello iperbolico, e del soverchio mirabile, agevolmente ci avvederemo, che per lo meno la Musica moderna nella espressione dei movimenti dello animo non può essere certamente inferiore alla antica. Da questa imitazione dipende la ragione, per cui comunemente piace più il canto del suono, svegliando nello spirito un particolare diletto quella corrispondenza, che egli ravvisa fra la Musica, ed il sentimento delle parole.

> della facoltà, che ha la Musica di imitare il senso delle parole, e di risvegliare nell'animo varj affetti.

Alcune imitazioni naturalissime, e nulla o poco simboliche si presentano da per se

stesse

stesse alla mente de' Maestri; ed abbisognano di pochi precetti. Di queste ne anderò facendo parola, secondo che l'ordine, e l'occasione il richiederà. Rivolgendomi dunque agli interni movimenti dell'animo, dico che in un modo principale si possono colla Musica esprimere, procurando cioè di imitare co' suoni musicali quelle modificazioni, che i particolari affetti nella voce naturale introducono. Distinguonsi però io le passioni umane in veementi, ed in deboli. Chiamo veementi quelle passioni, che vanno accompagnate da una straordinaria agitazione degli spiriti animali, che supera la naturale. Di tal genere sono l'allegrezza, l'ardire, la temerità, la collera, il furor, la disperazione. L'altra specie di passioni, che nomino deboli, rende più del consueto languido, e meno attivo il moto degli spiriti animali. A questa seconda classe appartengono la mestizia, la pusillanimità, la tristezza, i languori gli svenimenti. Si tiene di mezzo in fra due lo stato tranquillo dell'uomo, in cui gli spiriti hanno quel movimento, che al perfetto adempimento delle funzioni animali è più confacente.

Si muovono gli affetti imitando co' suoni musicali quelle modificazioni, che i detti ~~voci~~ affetti nella voce umana cagionano

Divisione delle passioni in veementi, ed in deboli.

Cominciando dalle imitazioni

più

più facili, ognuno sa che in riguardo alla voce, che ognuno in istato di calma, gli affetti veementi ci fanno parlare più forte, e più presto, gli affetti deboli più piano, e più adagio. Grande, ed incredibile giovamento riceve la Musica dal forte, e dal piano. Stimo quasi superfluo il notare, che se colla Musica si imitano dei suoni, la forza dei suoni imitanti ha da essere proporzionale a quella degli imitati. Ogni principiante vede, che il fragore dei tuoni, lo scoppio delle bombarde richiede suoni forti, e strepitosi; e che al contrario il mormorio di limpido ruscello, o di fronde agitate da tenue Zefiro richiede suoni sommessi, e deboli. Tacendo rapporto alle affezioni, l'indole dei varj passi o allegra, o moderata, o patetica insegna ad un Cantante, e ad un Sonatore, che abbia buon gusto, i competenti gradi del forte, e del piano, con cui essi passi vanno eseguiti. Un passo allegro, risoluto, iracondo dimanda il forte; ed a rovescio un passo tenero, languido, malinconico dimanda il piano.

Gli affetti veementi ci fanno parlare più forte, e più presto; i deboli più piano, e più adagio.

Uso nelle imitazioni del forte e del piano.

Il presto poi, e l'adagio, oltre la naturale facoltà di esprimere tutto ciò, ch'è veloce, o tardo, hanno tanta connessione cogli affetti, che i varj gradi di celerità, con cui si sogliono proferire le cantilene, si dinotano dai Maestri di Contrappunto

Del presto, e dell'adagio.

coi

coi nomi di alcuna modificazioni dell'animo umano nostro, scri=vendo al principio della compo=sizione: Allegro, Vivace, Mo=derato, Affettuoso; Grave &c. Non si sceglieva mai o l'alle-gria con un tempo largo, o la mestizia con un tempo veloce. Il fermarsi molto nel medesimo suono serve ad esprimere la di=mora, la durevolezza, l'eternità la stabilità, la costanza, la quiete, il sonno, l'ammirazione, le altre.

Del grave, e dell'acuto.

Anche le voci gravi, ed acute possono venire in concio per eccit=tare nella mente l'idea di varj caratteri, ed affezioni. essendo proprie del sesso virile le voci gravi, e del muliebre le acute, ed appartenendo in virtù della loro struttura all'uomo la maestà, e la robustezza, alla donna la grazia, e la mollezza; ne segue, che dandosi mano un'idea coll'altra, i suoni gravi riusciranno maestosi, e robusti, i suoni acuti graziosi, e molli. E giacchè l'uomo supera la femmina nella forza, e nell'ardire, ed è conseguentemente più atto a porsi nocumento altrui, ed a risvegliar terrore negli animi. delle voci gravi, e virili, e non delle acute, e muliebri si vagliono i Maestri per movere colla Musica l'affezione della paura. Questo artifizio è palese, ed insito sto per dire dalla Natura, ingegnan=dosi sino le vecchiarelle di con=traffare la voce grave, quando raccontano ai fanciulli con molto loro danno certe novelle terribili

terribili. Colla paura ha molta connessione l'oscurità. L'uomo destinato alla luce non potendo nelle tenebre far uso della vista, senso che in lui predomina, corre pericolo di essere insultato senza potersi difendere. Quindi allo oscuro ogni cosa ci mette in apprensione, e in timore, ed in tale incontro la fantasia agitata facilmente si finge deformi fantasime, ed apparizioni terribili di Ombre. Da queste poche osservazioni si dedurrà facilmente la ragione, per cui si usino le voci gravi, quando si tratta di notti tenebrose, di Ombre di morti, alle quali se si mette in bocca parole, devono essere di suono grave. Anche la profondità va ~~contraddistinta~~ simboleggiata colle voci gravi, essendo frequentemente accompagnata dalla oscurità, e risvegliando nei riguardanti timore. Per un contrario motivo le voci acute servono ad esprimere gli obbietti sublimi. Se favellando mi occorrerà di descrivere il cupo fondo di una valle, l'erta cima di una montagna, renderò più del solito, e senz'avvedermene prima più grave, ed indi più acuto il tuono della mia voce. Ma senz'andare in traccia di nuove riflessioni, basta avvertire, che fra le Parti della Musica, la più grave si chiama Basso, e le due più acute Alto, e Soprano. Questi soli nomi chiaramente dinotano l'analogia, che la

nostra

nostra mente ritrova, fra il grave ed il basso, fra l'acuto e il sublime.

Servirà parimente all'imitazione la diversa specie delle Battute in tempo di egualità o di inegualità. Fra le prime che sono più note delle seconde, quella a quattro tempi si fa sentire più maestosa di ogni altra. Le Battute, che spezzano i suoi tempi in tre parti, quando si canti, o suoni velocemente riescono allegre, e brillanti ed esprimono a maraviglia l'esultazione, il ballo, il tripudio. Tali sono la Dodecupla la Sestupla, la Nonupla ... L'usare piuttosto un tempo, che l'altro della Battuta, o delle sue spezzature torna frequentemente in concio per congruamente rappresentare il [illegible] delle parole. Il tempo buono, che si regge da se, simboleggia assai naturalmente la tranquillità, la costanza, la posatezza. Differente è il carattere del tempo cattivo, il quale ricadendo nel tempo buono immediatamente seguente, è atto ad indicare premura, movimento, risoluzione. Può valersi il Compositore di questi artificj, salva la legge necessaria alla retta pronuncia, che le sillabe con accento, che si sostengono da per se stesse, ~~[illegible]~~ si collochino in tempo buono di Battuta, o di spezzatura. La Sincopa, e l'equivalente Legatura congiungendo insieme due tempi,

con

Serve [movimento] alla imitazione anche la diversa specie delle Battute.

e l'usare piuttosto un tempo che l'altro della Battuta, o delle sue divisioni.

In qual modo la Legatura possa giovare alla imitazione.

un cattivo, ed un buono, il primo dei quali di sua natura tende verso il secondo, rappresenta molto bene l'artificiale legamento di due cose naturalmente disgiunte. Se ne sono perciò serviti gli Autori per dinotare reali, o metaforici legami, e la loro tenacità. Il contrattempo di una caduta, di una scossa si esprime vivamente con due note, la prima seguita dal punto, e la seconda eguale al valore del punto stesso, o alla metà della nota precedente.

Oltrechè le Pause servono di riposo alle voci, e fanno che maggiormente spichi l'entrare dei Soggetti, e dei Controsoggetti, ajutano esse pure l'espressione del sentimento delle parole. E primieramente riescono opportune per separare un senso dall'altro. Sono in secondo luogo atte naturalmente a rappresentare all'anima l'idea del silenzio. Possono in terzo luogo dinotare l'attendere, l'aspettare, ed altresì la sospensione, o il fine di una cosa qualunque. Esprimono in quarto luogo tutte quelle affezioni, da cui restiamo talmente occupati, che perdiamo le parole. A tal genere appartengono la dubbietà, o sospensione di animo, la confusione, l'ammirazione, lo stupore. Finalmente se ci sarà una serie di note, e di Pause di piccolo egual valore, che vadano regolatamente alternando ne risulterà una voce interrotta,

Anche le Pause ajutano l'espressione del sentimento delle parole

la

la di cui interruzione spiccherà viè più, se cadendo le note in tempo cattivo, resteranno in aria, e mancherà loro il sostegno. Queste voci interrotte possono servire a varie imitazioni, ed esprimere il dirotto pianto, la palpitazione del core, ed altre cose sì fatte.

Ricapitolazione delle cose dette, ed introduzione a quelle, di cui si dee trattare.

I fonti di imitazione da me finora rintracciati sono il piano, e il forte; l'adagio, e il presto; il grave, e l'acuto; le battute di vario genere, i tempi buoni, o cattivi, le legature, e le pause. Si accorgerà, Gentilissimo Sig.r Rovarante, non aver io per anche fatta menzione di due principalissimi elementi, onde è formata la Musica, cioè a dire dell'Armonia, e della Melodia. Parlerò prima di alcune melodiche espressioni, che dipendono dalle cose già spiegate, e non abbisognano di nuovi principj.

~~Come si esprimano~~ L'ascendere, il discendere, ed altre cose analoghe si esprimono passando dal grave all'acuto, o dall'acuto al grave

Ho detto che le voci acute rappresentano gli obbietti sublimi, le voci gravi gli obbietti bassi. Da ciò facilmente deducesi, che per significare o ascendimento o discesa, mi varrò di suoni, che si trasferiscono o dal grave all'acuto, o dall'acuto al grave. Questa imitazione è così appropriata, che di fatto i Musici chiamano ascendere il passare dal grave all'acuto ed al contrario discendere il far passaggio dall'acuto al grave. Coll'ascendere hanno connessione balzare, sorgere, innalzare, e

per

per metafora lodare, rendere glorioso, giungere ad alto, e felice stato: cose tutte, che si esprimono con melodie, che camminano dal grave verso l'acuto. Serbano analogia col discendere le cadute, le rovine, i pregiudizj, l'immergere, il gittare a terra, l'abbassare, l'opprimere, il biasimare il vituperare, il divenire miserabile. Ognuna di tali azioni si potrà dinotare con voci, che discendano dallo acuto al grave.

*e similmente ~~accrescimento~~ il crescere, o il calare;*

Paragonati insieme due suoni, uno grave, e l'altro acuto, si dice con linguaggio nostro, che l'acuto cresce sopra del grave, e che il grave cala dallo acuto. Con molta ragione adunque volendo indicare o accrescimento, o decrescimento, ci scrivemo di melodie, che si trasferiscano o dal grave allo acuto, o dallo acuto al grave. Si esprimono frequentemente gli accrescimenti, o le diminuzioni ascendendo, o discendendo per un Semituono minore, il quale percotendo notabilmente l'orecchio, fa che si formi una idea assai distinta delle dette aumentazioni, o diminuzioni. Siccome l'andare avanti è una continuazione, ed un replicato accrescimento dello intrapreso cammino; così il tornare addietro è una iterata diminuzione del viaggio precedentemente già fatto. Quindi l'andare avanti si esprimerà con voci, che progrediscono

*l'andare avanti, o il tornare indietro.*

Dal

dal grave allo acuto, ed il tornar indietro con voci, che retrocedono dallo acuto al grave. Se qualcuno o cammina, o corre girando ora in avanti, ed ora torna indietro. Per la qual cosa sì fatta azione rappresenteransi con voci, che si movono ora dal grave allo acuto, ed ora dal acuto al grave. E se il giro ritorna in se stesso, la cantilena lo imiterà restituendosi a quella nota dalla quale ha [illegible] avuto principio. Col mezzo di replicati scemamenti qualunque cosa si dilegua, e perisce. Ma i replicati scemamenti si contrassegnano con una serie di suoni, che discende dallo acuto al grave. Dunque lo svanire, il dileguarsi il perire di un oggetto resterà vivamente espresso dalla serie predetta. Svanisce, e si toglie apparentemente dal mondo un oggetto occultandolo, e ricoprendolo: le quali cose però si imiteranno con melodie, che passano dallo acuto al grave. Al contrario il render palese, lo scoprir che che sia, il avere dinanzi gli occhi si dinoterà congruamente con suoni, che facciano passaggio dal grave allo acuto. La lontananza suole dai Maestri di Contrappunto esprimersi con suoni fra loro distanti di tuono. Che se si vorrà imitare la azione dello allontanamento di un oggetto dallo altro, siccome questo ~~accompagnamento~~ allontanamento da principio è piccolo, ed indi va diventando maggiore; così sarà di uopo simboleggiarlo con

Il girare come si imiti.

In qual modo si dinoti lo svanire, il dileguarsi, il perire, lo occultare, il ricoprire;

e al contrario, il render palese, lo scoprire qualche cosa, l'avere dinanzi agli occhi.

Maniera di esprimere la lontananza.

con una serie di voci, che dal Tuono della prima si vadano sempre più discostando.

La Semplicità, ed altre doti analoghe, cioè a dire la Innocenza, la Purità, il Candore, la Pace, la Rettitudine, la Verità la Docilità, la Facilità si rappresentano colle più semplici melodie. Cominciando fra queste tiene il primo luogo l'Unisono, se ne servono molto i Maestri per simboleggiare le sovra registrate Virtù, accompagnandolo con armonie parimente semplici; che i varj Bassi forman tra loro.

Qualmente si rappresentino la Semplicità, ed altre Doti analoghe.

Per dinotare la Accortezza, gli Artifizj, i Raggiri, la Malizia, la Turbolenza, la Bugia, la Frode, l'Inganno debbono i Maestri valersi di melodie, e di armonie ricercate, ed artifiziose. Se si tratterà di Accortezza, di Ingegno, e di Artifizj onesti, le melodie, e le armonie dovranno essere studiate sì, ma nel tempo stesso grate all'orecchio. Che se si vorranno imitare i Raggiri ingiusti, la Malizia, la Turbolenza, la Bugia, la Frode, l'Inganno, ed altri siffatti vizj; fra le melodie, e le armonie ingegnose si scelgano quelle, che pungon l'orecchio. Un tale disgusto serve ad esprimere la mala natura dei detti vizj, il danno che portano alla società, e la disapprovazione che meritano. La Bugia, la Frode, e l'Inganno verranno al vivo rappresentate

e a conoscere la Accortezza, gli Artifizj, i Raggiri &

Da

da modulazioni, che riescano inaspettate, ed inganino il senso. Io non so approvare, che si adoprino quelle da me condannate nel Libro primo, che conducono immediate da Tuono a Tuono, i quali non sono mutuamente inordinati, essendovi manifestamente in Musica di passaggi lecti, che defraudano la aspettazione dell'udito, e che possono ottimamente adattarsi alle mutazioni, di cui facciamo parola.

Il compimento del senso della orazione si esprimerà colle Cadenze della perfezion dalle quali, e della maggiore, o minore attività di concludere, nel secondo Libro ne ho tenuto discorso. Dovranno parimente le Cadenze significare compimento, conclusione, stabilimento, decisione, ed altre si fatte cose, dopo le quali non altro si aspetta. Se fatta Cadenza, si muterà poscia Tuono, servirà questo cangiamento, massime quando si passi ad un Tuono di natura diversa dal precedente, per dinotare la varietà dei sentimenti, e delle narrazioni della Poesia, o della Prosa.

Colle Cadenze si finisce il senso dell'orazione, e significano altresì compimento, conclusione, stabilimento decisione &.

Si terrà il senso della orazione sospeso, o usando passi derivati dalle Cadenze, i quali finiscano in un accompagnamento derivato di Terza e Sesta, di Quarta e Sesta ovvero ponendo in opera quei passaggi fondamentali, che non sono Cadenze, o i loro derivati. Molta maggior sospensione ne

Come si tenga sospeso il senso dell'orazione. Caso [illegible]

nasca

nasce adoprando o gli accompagnamenti consonanti per rappresentanza, o gli accompagnamenti dissonanti, su i quali l'orecchio manifestamente comprende non potersi far punto, desiderandosi dopo di essi qualche accompagnamento realmente consonante, che radolcisca quella impressione piccante, ch'hanno nell'orecchio prodotta.

*Collo stesso artificio s'esprime tutto ciò, che non lascia l'animo pago.*

I passi non conchiudenti, di cui trattiamo, serviranno pure ad esprimere tutte quelle cose, che non lasciano l'animo pago, dopo le quali se ne aspettan dell'altre, come sarebbe a dire il prolungamento di che che sia, la ricerca, la confusione, la dubbietà.

*Altro modo di imitare la dubbietà, e la ricerca.*

La dubbietà, e la ricerca si ponno parimente imitare con frequenti modulazioni da tuono a tuono, le quali lascino incerto l'orecchio, in qual tuono si abbia di andar a finire. Relativamente alla ricerca i diversi tuoni non esprimono solo l'incertezza di ritrovare la cosa cercata, ma ancora la varietà dei luoghi, nei quali si cerca.

*Alcuni oggetti si esprimono col mezzo delle circostanze*

Alcuni oggetti, che considerati in se stessi riuscirebbero di difficile imitazione, si esprimono talvolta molto agevolmente col mezzo delle circostanze, che li accompagnano.

*Imitazione della speranza dubbia.*

Non si saprebbe a prima vista come imitar la speranza: ma se per esempio fosse dubbia, e fallace, queste circostanze mi suggeriscono

la

la maniera di simboleggiarla con quegli artificj, che rappresentano il dubbio, e l'inganno.

Imitazione del baleno.

Se venisse proposto di imitare il baleno, si potrebbe notare, che si move velocemente, e tortuoso. Siccome il cammin diritto si contrassegna assai bene con voci unisone, così il cammino tortuoso si esprimerà con suoni che ora vanno dall'acuto al grave, ora dal grave all'acuto. Con tali suoni adunque, i quali celeremente si muovano, si potrà rappresentare il baleno.

Una delle più importanti circostanze si è l'impressione, che gli oggetti fanno nell'animo.

Il considerare quali impressioni facciano, e quali affetti movano nell'animo nostro gli oggetti, è una delle più importanti circostanze, che in ciò possa notarsi. Quindi si vede, che se sarà in nostro potere l'espressione dei varj affetti, sapremo parimente imitare gli oggetti tutti, che nella mente li producono. ~~i detti affetti~~ Per qual cagione trattandosi di cose pastorali si usano in Musica le più aggradevoli melodie, ed armonie? Non per altro certamente, se non perchè tali oggetti generano in noi delle grate impressioni. Facendomi adunque a rintracciare i fonti, da cui derivano le imitazioni degli affetti, primieramente io divido questi in grati, ed ingrati, fra i quali altresì vi stanno degli affetti misti, che più, o meno partecipano del grato, o dell'ingrato.

Come si svegliano colla Musica le dolci affezioni

Si svegliano colla Musica le affezioni dolci, ponendo in opera le più squisite melodie, ed armonie,

Delle

delle quali nei precedenti Libri ho trattato. Non si escludono totalmente i movimenti piccanti di melodia, le consonanze per rappresentanza, e le dissonanze; purchè si scelgano le più miti, e si adoprino unicamente per condimento, e per rendere la composizione più saporita. Si preferiscano come più graziose i più eleganti passaggi maniere, le mitigiori modulazioni da Tuono, a Tuono, dalle quali il senso ricava un diletto molto considerabile; ed abbiasi la cura di valersi di Tuoni bene accordati, relativamente ai quali i tasti ritrigano il proprio nome.

Artifizj coi quali si eccitano nell'anima gli affetti ingrati.

Otterremo il fine di eccitare nell'anima gli affetti ingrati mescolando con più larga mano nella composizione le melodie, e le armonie risentite, e piccanti, e continuando queste per qualche tempo, onde l'udito possa gustarne il sapore, massimamente quando ~~sono nel loro genere le più discordanti~~ si pongono al paragone con suoni, che ne fanno spiccare l'acerbità, e sono nel loro genere le più discordi. Si accrescerà l'amarezza, usando più di una dissonanza nel tempo medesimo, e specialmente quelle che stanno fra loro in Settima, o in Seconda, o in qualche intervallo alterato. Gioverà al fine di movere gli affetti tristi l'adoprare senza preparazione la Settima particolarmente minore, e diminuita; il

il prepararle con essa, ovvero col mezzo di consonanze per rappre= sentarla le dissonanze altre disso= nanze, il risolvere le dissonanze o in quella consonanza per rappresentanza nella detta Settima, e il ridurre in pratica per fine di tutti gli arti= fizj, che servono a rendere più sensibili le dissonanze. Facciasi un uso discreto tanto dei passaggi fondamentali, e derivati, quanto delle modulazioni da Tuono a Tuono meno eleganti, e s'abbia mira di sciegliere que' Tuoni manco bene accordati, che come spiegherò fra poco, si adattano meglio alla varia indole delle moleste passioni. Noto per altro, essere ufficio della Musica il dilettare, e doversi perciò dar adito alle descritte durezze colla dovuta moderazione.

Calcando una strada media fra le due descritte, si muovono gli affetti misti.

Se batteremo una strada me= dia fra le due già descritte, che introducono nell'anima gli affetti grati, ed ingrati, otter= remo il fine di eccitare in essa gli affetti misti. Non abbiamo salvo che a mescolare nella com= posizione e in riguardo alla me= lodia, e in riguardo all'armonia più agro di quello richiedono le affezioni piacevoli, e più dolce di quello richiedono la disgustosa.

Molto cangiano le forti passioni, poco le deboli cangiano nella voce in riguardo all'acuto, e al grave.

Torno a considerare la divisione delle umane passioni in veementi, che vanno accompagnate da una straordinaria agitazione degli spiriti animali, ed in deboli, che rendono più del consueto languido, e meno attivo il movimento degli spiriti mentovati.

mentovati. Le affezioni del
primo genere fanno sì, che
mentre parliamo, la nostra voce
ora si alzi dal grave allo acuto,
ora si abbassi dallo acuto al
grave con salti e più frequenti,
e maggiori di quelli, che talvolta
si usano in istato di calma.
Un contrario effetto producono
gli affetti della seconda specie,
non permettendo essi, che nella
voce nascano in riguardo al
grave, e allo acuto considera=
bili alterazioni. Per imitare
adunque le forti passioni, si
introdurranno nella composi=
zione e lunghe progressioni di
movimenti di grado, e salti
allo insù e allo ingiù, i quali
hanno da essere tanto più nu=
merosi e più grandi, quanto una
più gagliarda commozione si
rappresenta. Con un opposto arti=
fizio si potranno simboleggiare
gli affetti placidi, schivando al=
meno la frequenza de' salti,
e particolarmente dei grandi;
ed altresì le lunghe serie di
suoni di grado, che portino la
voce o molto verso il grave,
o molto verso lo acuto. Tra
le dette affezioni, che infie=
voliscono il moto degli spiriti
animali deve annoverarsi an=
che il sonno. Ho detto, che
il sonno si imita fermandosi
molto nella medesima voce.
Aggiungo presentemente, che
si otterrà un pari effetto, mentre
la voce faccia dei piccoli movimenti.

Un' altra importantissima circostanza resta da notarsi nelle affezioni veementi, e fiacche, le quali imitate dalla Musica pro=duce degli effetti maravigliosi. Oltrechè gli affetti gagliardi ci fanno parlare più forte, e più presto del consueto, gli affetti deboli più piano, e più adagio, ~~che noi~~ come superiormente ho avvertito, interviene di più, che i primi alzino il tuono ordinario della nostra voce, ed i secondi l'abbassino. Dato prima un moderato fiato ad una canna d'Organo, se ne accresca la velocità, e la forza, ne risulta un suono non so=lamente più forte, ma ancora alquanto più acuto. Tutto al contrario succede, quando si minora la velocità, e la forza del fiato. La rammentata espe=rienza mostra il legamento, che passa fra il più forte, il più presto, il più acuto, affetti tutti nel tempo medesimo ca=gionati dalla violenta agita=zione degli spiriti animali, che accompagna le passioni gagliarde; ed altresì fra il più piano, il più adagio, e il più grave, effetti tutti unitamente prodotti dal tardo moto di essi spiriti indivisibil compagno delle fiacche passioni. L'esposta dottrina a buon conto ci in=segna, che il solo trasferirsi dal grave all'acuto, o dall'acuto al grave, senza però altro valersi di voci alterate (spiegherò poscia cosa siano queste

i affezioni veementi alzano il tuono ordinario della nostra voce, le fiacche l'abbassano.

queste voci alterate) serve ad esprimere una qualche veemenza, o debolezza d'affetti. La interrogazione, cui si dà luogo fra le figure retoriche, contiene in se stessa un non so che di energia, e per tal ragione volentieri si esprime con un passo melodico, che si muove dal grave verso l'acuto.

La interrogazione si esprime con un passo, che si muove dal grave verso l'acuto.

Ma conforme che gli affetti gagliardi, e deboli alterano il Tuono ordinario della nostra voce, così per vivamente imitarli si compiace molto la Musica di porre in opera delle voci alterate; e se l'alterazione è di accrescimento, serve agli affetti forti, e se di scemamento, agli affetti fiacchi.

Le voci alterate crescenti servono agli affetti forti, le calanti ai deboli.

Si dividono le alterazioni in due generi, il primo dei quali comprende le voci modificate per un Semituono minore, che cadono sotto la considerazione del Contrappunto, e soggiacciono alle sue leggi. Abbraccia il secondo genere le alterazioni, che dipendono dalla ineguale accordatura dei comuni Stromenti da tasto della quale ho fatto parola.

Si dividono esse in due generi.

Cominciando dal primo genere, si suddivide egli in varie classi, che vogliono tutte a parte a parte considerarsi. E primieramente alcune voci meritano il titolo di alterate, quantunque spettino naturalmente a quel Tuono, in cui si trova la cantilena. Per togliere il velo dinanzi a questo apparente arcano, rifletto

Delle voci alterate del primo genere,

e primieramente di quelle, che spettano naturalmente al Tuono, in cui si trova la cantilena

che

che nella tranquillità non dominata nè da deboli, nè da forti passioni consiste l'ottimo stato dell'uomo. Ora un tal ottimo stato dalla Musica si rappresenta col Sistema melodico-armonico fra tutti il migliore: proprietà che compete al Modo per Terza maggiore, siccome quello che nasce dall'aggregato di due Sistemi, uno di armonia, l'altro di melodia, che sono dotati della massima perfezione. Alla base del Modo maggiore corrispondono la Seconda maggiore, la Terza maggiore, la Quarta, la Quinta, la Sesta maggiore, la Settima maggiore, l'Ottava, la Nona maggiore, la Decima maggiore &c. Paragonate le Scale del Modo per Terza minore, e dei cinque derivati, de' quali ho fatta menzione nel Libro primo, con quella del Modo per Terza maggiore, se una qualche corda cala relativamente all'analoga del Modo per Terza maggiore, ~~sveglia~~ risveglia agli affetti deboli; se cresce, risveglia ~~sveglia~~ gli affetti forti. Avverto che ~~una corda che~~ si conoscerà appartenere una corda ad un dato Modo, quando ad essa si ~~adatti un accompagnamento determinato dalle origine del Modo stesso~~, ad ~~in oltre~~ si adoperi negli accompag.ti, e nei passaggi ad esso Modo spettanti. Nel Modo minore campeggiano le corde terza, sesta, e settima, che sono Terze minori

corde, a quali / quali consonanze sono elevate.

dei tre

dei tre accompagnamenti; che ad esso danno l'origine, riescono patetiche; perchè calano per un minor Semituono dalle analoghe del Modo maggiore, che nei tre accompagnamenti del Modo stesso sono Terze maggiori.

*Regole per conoscere le alterazioni delle dissonanze.*

Se ad un accordo di Terza e Quinta si aggiunge una dissonanza, si ponga al paragone con quella dello stesso nome, che si riferisca alla base del Modo per Terza maggiore, e ~~secondo~~ quando cali, o cresca per un Semituono minore, l'orecchio la giudicherà molle, o veemente. Ho supposto finora giusta la corda fondamentale dell'accompagnamento consonante, col quale si accoppia la dissonanza. Ma se lo scemamento, o l'aumentazione dello intervallo dissonante dipendesse da accrescimento, o da diminuzione della base, il suono di questa si udirebbe veemente, o affettuoso, ed il suo paragone colla dissonanza ~~e detta comparirebbe~~ la dissonanza, le farebbe ~~acquistare~~ un ~~contrario carattere~~ sì, che la dissonanza stessa almeno in parte acquistasse un contrario carattere.

*Un passo alterato di melodia, o fa comparire alterato il secondo conseguente, o ne mette in maggior vista l'alterazione.*

Quantunque nel Modo maggiore non soggiaccia a modificazione nè la quarta corda, base di un accompagnamento consonante, ~~nè la settima corda, Terza maggiore dello stesso~~ nè la settima, l'una base, e l'altra Terza maggiore di due simili accompagnamenti consonanti, nulladimeno corrispondendoci esse in Quarta ~~maggiore~~ superflua, la natura del passo alterato fa credere crescente la settima corda, se succede alla quarta, ovvero calante

questa

questa, se è preceduta da quella.
Nei rimanenti sei Modi o è, ^ decrescente il primo dei detti suoni formanti Quarta maggiore superflua, e giusto il secondo, ovvero esatto il primo, ed il secondo soprabbondante: e quivi pure il suono calante, che prende rende spiritoso il suono giusto, che gli vien dietro; ed al contrario il suono crescente, che prima s'ode, ammollisca il suono non alterato, dal quale è seguito.

^ (come accade in cinque)

Effetto analogo cagionato nella armonia degli intervalli alterati.

Alla è minore la Settima, che si può aggiungere all'accompagnamento fondato sulla quinta corda del Modo maggiore, e conciossiachè una dissonanza si riferisca in Quinta diminuita minore alla Terza maggiore, divien questa più brillante, ed essa quella acquista un grado maggior di mollezza.

Anche col Modo maggiore si possono muovere gli affetti teneri.

Anche col Modo per Terza maggiore si possono muovere gli affetti teneri. Ho già detto, che la settima con la antecedente rende molle la quarta susseguente, e che si sperimenta pratica la Settima minore accoppiata all'accompagnamento della quinta corda. Si faccia inoltre uso degli accordi dei Modi derivati, che contengono qualche suono calante, e s'otterrà pienamente il fine desiderato.

Imitazioni degli affetti, che nascono dal modulare da Tuono a Tuono.

Debbo ricordare una ricca sorgente di imitazioni dei nostri affetti deboli, e forti, che scaturisca dal modulare da

un

un Tuono all'altro, che non
abbiano commune la Scala, e
dal por tosto in uso quelle corde
naturali (parlerò fuori delle
artificiali) che il nuovo Tuono
modifica col Semituono minore.
Se la modificazione sarà di ac=
crescimento servirà agli affetti
lieti, se di minorazione, ai de=
boli. Si adempierà sufficiente=
mente l'intento anche quando
i suoni modificati nel nuovo Tuono
sien giusti, cioè a dire nè cres=
centi, nè calanti, e molto più
quando il paragone di qualche
suono li faccia apparir crescenti,
o calanti, o pure quando sieno
veramente tali. In tutte le
notate circostanze l'impressione
riuscirà ancora più viva, fa=
cendo succedere l'uno all'altro
due suoni, che differiscano per
il minor Semituono, a dire di
varii Tuoni spettanti; di modo
che si cangi Tuono ascendendo,
o discendendo per un Semituono
minore.

Detto quanto basta delle
corde naturali dei Modi relati=
vamente al movimento delle
passioni deboli, e forti, m'in=
oltro a trattare delle corde arti=
ficiali, le quali sono la sesta,
e la settima del Modo per Terza
minore, la quarta di ascendere
i Modi, e queste tutte crescono
sopra le naturali per un Semi=
tuono minore, e servono agli
affetti veementi. Chiude la
serie la seconda corda artificiale
del Modo per Terza minore,

delle corde artificiali relativa=
mente al movimento degli
affetti.

la

la quale calando dalla naturale per un minor Semituono è adattatissima alli espressione delle molli affezioni.

Benchè si rassomiglino alle analogie del Modo maggiore le corde artificiali sesta, e settima del Modo minore, basta che i suoni calanti prodotti dalle corde naturali terza, sesta, e settima, e dalla seconda artificiale siano contenuti negli accompagnamenti antecedenti, perchè le dette corde artificiali sesta, e settima si facciano sentire risaltanti. Si otterrà un effetto maggiore, se una parte si moverà dal suono decrescente ad una di esse corde artificiali. Giungerà al sommo l'energia delle nostre corde, mentre con esse nello stesso accompagnamento si uniscano una, o più corde calanti. Non altrimenti acciocchè spicchi il patetico delle quattro corde decrescenti, egli è sufficiente, che negli accompagnamenti antecedenti siano comparse le corde artificiali, che sopra le naturali crescono un Semituono minore. Si udiranno più patetiche le corde calanti, se una parte si trasferisca da un suono artificialmente accresciuto ad una delle dette corde calanti, le quali arriveranno per ultimo ad acquistare un carattere sommamente tenero, ed appassionato, quando si accoppieranno nel medesimo accompagnamento

Le corde calanti terza, sesta, e settima, e seconda artificiale del Modo minore fanno, che si sentano risaltate le corde artificiali sesta, e settima;

~~molto più le quattro corde artificiali~~ e queste accrescono il patetico delle mentovate corde calanti;

accompagnamento colle corde artifiziali aumentate. Ella è facile da cavare la conseguenza, che il Modo per terza minore, in cui si contengono quattro corde calanti, tre naturali, ed una artifiziale, ed altresì tre corde artifiziali accresciute pel Semituono minore è adattatissimo per esprimere una mistura di affetti parte deboli, e parte forti. Quando ci ritroviamo nelle afflizioni diamo tratto tratto in certi impeti di esagerazioni, di imprecazioni, di impazienze, di smanie, di disperazioni. Accade pure di rappresentare frequentemente, mentre si tratta di cose meste, la fierezza del dolore, la crudeltà degli uomini, e degli Dei, e mille altre sì fatte circostanze, che vanno miste colla veemenza, e colla energia. Non di rado parimente interviene, che mentre due parti cantano insieme l'una debba risvegliare la fiacchezza, e l'altra le gagliarde passioni. Il bravo Maestro deve aver mira di usare a tempo, e a luogo i suoni calanti, e crescenti, mettendo in bocca di quella tal parte, conforme richiedono i varj incontri, piuttosto le voci di un genere, che dell'altro.

Il Modo minore è atto ad esprimere un misto di affetti deboli, e forti.

Poste al paragone nel Modo maggiore, e minore le corde quarta naturale, ed artifiziale, che si corrispondono in Semituono minore; le corde prima, e quarta artifiziale, che si corrispondono in Quarta superflua. o pure Quarta artifiziale, e ottava, che

Le corde quarta, e prima fanno spiccare in ambo i Modi la veemenza della quarta corda artifiziale.

che si corrispondono in Quinta diminuita
minore, ne seguirà, che le
corde quarta naturale, e prima,
o in ottava faranno sprezzare la
veemenza dell' quarta corda
artifiziale, e che al confronto
la quarta corda artifiziale o farà
acquistare il carattere patetico
alle corde naturali prima, e
quarta, o almeno lo metterà
in maggior vista. Mi sono
servito di quest'ultima espres-
sione, perchè le corde naturali
prima, e quarta possono essere
in certe congiunture, variamente
calanti, considerandole per esem-
pio come settime minori delle
corde seconda, e quinta, nel
qual caso il confronto della quarta
corda artifiziale accresce la loro
mollezza. Il nostro paragone
poi della quarta corda artifi-
ziale colle quattro corde calanti
del Modo per Terza minore ot-
tiene l'effetto di aumentare
per una parte l'energia di
quella, e per l'altra la dolce-
zza di queste.

e questa o rende patetiche, o più ammollisce le corde naturali quarta, e prima.

~ vicendevole unione della quarta corda artifiziale, e delle quattro corde calanti del Modo minore

Ho avvertito superiormente
che giova non poco alla imita-
zione degli affetti deboli e forti
il modulare da Tuono a Tuono
ponendo tutto in opera quelle
corde naturali, che il nuovo
Tuono modifica col Semituono
minore. Ora intanto debbo
rendere la proposizione più
generale, asserendo che giova
molto alla espressione dei no-
minati affetti l'usar promiscuamente
le

Cangiando Tuono giova alla espres-sione degli affetti l'usar promiscua-mente le corde naturali, ed artifiziali che il nuovo Tuono modifica col Semituono minore.

le corde naturali, o artifiziali del nuovo Tuono, che differiscono dalle corde naturali, o artifiziali del Tuono antecedente pel minor semituono. Se la mentovata differenza relativamente al nuovo Tuono sarà di accrescimento, servirà alle forti passioni, se di diminuzione, alle deboli. Le riflessioni fatte nel luogo citato in riguardo alle corde naturali si estendono anche alle corde artifiziali, ed io stimo superfluo il ripeterle.

*Di alcune alterazioni da usarsi solo nella melodia, ed opportune per il movimento degli affetti.*

Oltre le alterazioni sino al presente considerate, le quali determinano suoni o naturalmente, o artifizialmente spettanti al Tuono, in cui si trova la cantilena, ne adopra talvolta la Musica alcune altre, che ci fanno udire de' suoni, che non competono al Tuono né pure in figura di artifiziali. Conforme che questi suoni non possono aver luogo nella armonia, così fa di uopo usarli in tempi secondarj, nei quali il Basso, o le altre parti armoniche o tacciano, o almeno non battano; ovvero adoprarli in figura di semplici Appoggiature, quando si voglia ne' tempi buoni adattarle. Dando opportunamente l'adito alle nostre voci modificate nelle musiche composizioni colle descritte cautele, produrranno un ottimo effetto, e serviranno ai passioni deboli, o forti, secondo che la modificazione sarà di sminuimento, o di accrescimento.

Resta da noi in chiaro, qual parte abbiano nella espressione degli affetti deboli e forti le alterazioni di alcuni suoni, le quali traggono l'origine dalla inequale accordatura dei comuni Stromenti da tasto, che da me è stata stabilita, ed accuratamente spiegata. Queste modificazioni si dividono in due classi, cioè a dire di scemamento, e servono agli affetti fiacchi; di aumentazione, e servono agli affetti veementi. Le voci con b molle sono più gravi, e le voci con Diesis sono più acute di quello succederebbe, se anche ad esse si accomunasse il Temperamento delle voci, che corrispondono ai tasti bianchi. E qui fa di uopo nuovamente distinguere i suoni alterati in due specie. Alcuni si adoprano nella loro conveniente figura, e ritengono il proprio nome: altri cangiato nome assumono una bizzarra comparsa. Cominciando dai primi abbiamo veduto, nel Lib. che fra i cinque tasti neri degli Organi, e dei Gravicembali, tre si chiamano F#, C#, G#, e due Bb, Eb. Usati con detti tasti, i tre Diesis si sentono un po' crescenti, e i due b moll. un poco calanti. Cresce F#, e cala Bb per una quantità equivalente alla

Qual parte abbiano nella espressione degli affetti le alterazioni cagionate dalla inequale accordatura degli Stromenti da tasto

Quanto crescano i tre Diesis e calino i due b molli in riguardo al Temperamento dei tasti bianchi.

alla duodecima parte del Comma.
Le aumentazioni di C#, e il
decremento di $E^b$ ascendono
al doppio; e per il triplo è
del dovere più acuta la corda
G#. Se un passo di melodia, o un accompagnamento
è tranquillo, i notati accrescimenti lo rendono spiritoso,
allegro, un po' risentito; il che
succede negli accordi per Terza
maggiore D F# A, A C# E,
E G# B. Le proprietà di
questi accompagnamenti si
comunicano a quei Tuoni per
Terza maggiore, nei quali essi
accompagnamenti hanno luogo,
e quindi compete il carattere
di spiritoso al Tuono G, il carattere di allegro al Tuono D,
il carattere di allegro un poco
sfacciato al Tuono A tutti e
tre per Terza maggiore.

*I tre Diesis rendono spiritoso, o allegro, o un po' risentito un intervallo tranquillo;*

Che se l'andamento melodico ed accordo ~~intervallo~~ è
molle, i tre suoni crescenti
F#, C#, G# vi mescolano per
entro qualche energia. Giuntagli
patetico all'orecchio l'accompagnamento per Terza minore;
perchè, paragonato collo ottimo
accompagnamento per Terza
maggiore, la Terza decresce
un Semituono minore. Gli
accordi B D F#, F# A C#,
C# E G#, in cui c'entrano
i mentovati tre Diesis, uniscono insieme e la mollezza
provveniente dalle Terze minori
e quel grado di vivezza ch'
è proporzionato alle ~~loro~~ diverse aumentazioni dei suoni affetti dal Diesis. E quindi
traggono l'indole loro mista
i Tuoni per Terza minore E,
B, F#

*mescolano della energia negli intervalli molli;*

B, 7#, secondo che hanno parte nelle loro formazione o uno, o due, o tre dei riferiti accompagnamenti. Riescono questi Tuoni sommamente opportuni per esprimere certe affezioni partecipanti del patetico, e del ridente.

Se i tre suoni 7#, C#, G# hanno luogo in melodia o in accordi ridenti ne accrescono l'energia, e la veemenza. L'accompagnamento B D 7 di Terza dominante, e Quinta Diminuita ambo minori fondato sulla quarta corda B del Tuono diatonico derivato 7 sentesi ridente; perchè nel detto Tuono è crescente la quarta corda B base di esso accompagnamento. Si ritrovi la cantilena nel Tuono A per Terza maggiore, ed in tale circostanza l'accompagnamento simile al B D 7 si scoprirà essere G# B D, il quale ha per fondamento la quarta corda G# del Tuono D derivato dal Tuono A per Terza maggiore. Adoprato in tale figura l'accompagnamento G# B D, lo sperimenteremo più ridente del B D 7 per il motivo che la base G# di quello è alquanto più acuta in relazione ai suoni superiori B, D, di quello sia la base B di questo in relazione ai suoni superiori D, 7.

Quantunque i suoni 7#, C#, G# siano forniti di energia a grado a grado maggiore;

ciò

ne accrescono la veemenza degli intervalli ridenti.

I mentovati 2 casi possono diversamente giovare all'espressione degli affetti medii.

ciò non ostante, possono in qualche maniera giovare alla espressione degli affetti deboli, facendo nel loro paragone comparire calanti, e conseguentemente molli, ~~anzi più~~ e patetici degli altri suoni. ~~Trovasi taluno della consonanza rattemperato~~ Torno di nuovo a considerare l'accompagnamento G# B D fondato nella quarta corda G# del Tuono D derivato dal Tuono A per terza maggiore, il quale è analogo allo accompagnamento diatonico B D F, essendo l'accordatura di G# un poco più alta in riguardo a D nel terzo accompagnamento l'accordatura di B in riguardo ad F nello accompagnamento di quello sia ~~nel~~ secondo; ne segue, che il suono D, quinta diminuita ~~minore~~ di G# riesca allo orecchio più molle del suono F, quinta diminuita ~~minore~~ di B.

Dalla considerazione dei tre Diesis D#, C#, G# mi inoltro a quella dei due b molli Bb, Eb, i quali suonano un poco più gravi di quello succederebbe, se anche essi abbracciassero il temperamento delle voci, che corrispondono ai tasti bianchi. Riuscendo opportuni gli summenzionati per la imitazione degli affetti deboli, addiverrà, che i nostri b molli introdurranno della serietà nei movimenti di melodia, e negli ~~tut~~ accordi tranquilli, facendoli piegare alquanto verso il patetico, aumenteranno la mollezza, e diminuiranno

I due veri b molli introducono della serietà nelle melodie, e nelle armonie tranquille; aumentano il patetico delle molli, e diminuiscono la veemenza delle [illegible].

la

quelle melodia, ed
la veemenza di quegli accompagnamenti, che sono dotati di tali caratteri. Illustro con qualche esempio le tre notate particolarità. Gli accompagnamenti per terza maggiore $B^b D F$, $E^b G B^b$ si giornimentano più sarj, e meno lieti di quelli $F A C$, $C E G$, $G B D$ che di soli tasti bianchi sono composti; e questa proprietà si comunica ai Tuoni per terza maggiore, nella formazione dei quali essi accompagnamenti hanno parte. Quindi i Tuoni maggiori $F$, $B^b$ riescono meno tranquilli del Tuono $C$; perchè nella loro origine o entrano accompagnamenti con b molle, cioè $B^b D F$ nel primo, ~~$E^b G$~~ $B^b D F$, $E^b G B^b$ nel secondo.

esempj dai tre mentovati affetti prodotti dai b molli.

Rendono i b molli gli accompagnamenti per terza minore più patetici, e fanno sì, che il Tuono $G$ per terza minore composto dei tre accompagnamenti $C E^b G$, $G B^b D$, $D F A$ si senta alquanto più molle del Tuono $D$ parimente per terza minore, che è formato dai tre accompagnamenti $G B^b D$, $D F A$, $A C E$, e che questo comparisca alquanto più tenero del Tuono $A$, nella generazione del quale hanno luogo i tre accompagnamenti $D F A$, $A C E$, $E G B$ senza alterazione alcuna di Diesis, o di b molle.

Rendono più patetici gli accordi per terza minore;

Discendo alla terza particolarità di sopra enunciata, cioè che i b molli ~~mescolano~~ mescolano della mollezza insieme coll'energia di alcuni spezi di melodia, ed accompagnamenti

e mescolano della mollezza insieme colla energia di alcune melodie, ed armonie risentite.

gnamenti. Colli accordo più volte rammemorato B D di Terza, e Quinta ~~minore~~ diminuita io li pongo al confronto lo analogo A C E♭, e li suppongo tutti e due fondati sulle quarte corde crescenti B, A dei Tuoni F, E♭ derivati, quello dal Tuono C, quello dal Tuono B♭ per Terza maggiore. Le basi crescenti B, A ammettono nello uno, e nello altro la stessa accordatura comune a tutti i tasti bianchi. Non così le Quinte ~~minori~~ diminuite F, E♭, la seconda delle quali è un po più grave relativamente alla base A di quello sia la prima F in relazione alla base B. Il notato decremento della voce E♭ introduce qualche mollezza nello accompagnamento crescente A C E♭, che si suppone fondato sulla quarta corda A del Tuono E♭ derivato dal Tuono B♭ per Terza maggiore.

Siccome i tre Diesis F♯, C♯, G♯ possono indirettamente servire alla imitazione delle placide affezioni, facendo coi loro accrescimenti credere al senso calanti degli altri suoni, nei quali perciò il carattere patetico o si introduce, o si aumenta. così al contrario i due b molli B♭, E♭ sono atti a condiuvare alla espressione dei forti affetti, operando in guisa coi loro scemamenti, che giudicandosi crescenti degli altri suoni;

i detti due b molli sono atti a condiuvare indirettamente al movimento dei forti affetti.

facciano acquisto, o pure in esse si avvalori la indole di trementi. Vengo a considerare il movimento di melodia B♭ C♯ di Seconda superflua alli insù, il quale si trasferisce dalla terza corda naturale B♭ alla quarta arti=ficiale C♯ del Tuono G per Terza minore, ed altresì la relazione armonica di Sesta superflua E♭ C♯ formata dalle due corde, sesta naturale E♭ undecima artificiale C♯ del nominato Tuono. Quando anche le corde terza B♭, sesta E♭ accettassero la Temperazione dei tasti bianchi; farebbero nulla=dimeno spiccare la grazia della corda artificiale quarta, o un=decima C♯; perchè le corde terza, e sesta nel Modo per Terza minore sono patetiche, ed alterati i due intervalli B♭ C♯, E♭ C♯. Ma essendo B♭, E♭ un poco più gravi di quello richieda il nominato Temperamento; si scopre e=videntemente, che ancora per questo titolo comparirà mag=giormente la veemenza della voce C♯.

Tutto quello, che ho detto dell'affetto, che producono rela=tivamente alla imitazione delle passioni gagliarde, e finche le piccole alterazioni dei Diesis, e dei b molli realmente tali, si può colla debita pro=porzione applicare alle alte=razioni molto maggiori, da me superiormente descritte dai Diesis

~~Gli affetti~~, ~~prodotti nei~~ Diesis, e i ~~dai~~ b molli impropriamente tali producono effetti analoghi a quelli cagionati dai veri Diesis, e b molli, ma per altro molto maggiori.

Diesis, e dei bmolli, i quali si compariscono innanzi sotto aspetto non suo, e propriamente parlando sono Semituoni maggiori posti alle insù, e alle ingiù, che si adoprano in figura di Diesis, e di b molli. Sono atti i rapporti Diesis D♯, A♯, E♯, B♯ ad esprimere le più violenti passioni, come per esempio la ferocità, il furor, la disperazione: ed a rovescio i b molli A♭, D♭, G♭, C♭, F♭ rappresentano eccellentemente le passioni più deboli quali sono la tristezza, l'abbattimento di animo, i languori, gli svenimenti.

Non permettendomi il presente Saggio Compendio di dilatarmi gran fatto, dirò solamente qualche cosa dei tre accompagnamenti chiamati per Terza minore F A♭ C, B♭ D♭ F, E♭ G♭ B♭, e degli altrettanti Tuoni per Terza minore C, F, B♭, nella origine dei quali essi accompagnamenti hanno luogo. Nella mia musicale Partecipazione le Terze minori F A♭, B♭ D♭, E♭ G♭ stanno di mezzo fra le due ragioni 5 : 6, 6 : 7, ed anzi si accostano alquanto più a questa che a quella. Alla ragione 6 : 7 si potrebbe dar nome di Terza minidiminuita, e quindi le nostre Terze

sono

Accompagnamenti dei tre accordi assai flebili chiamati per Terza minore, e degli altrettanti Tuoni per Terza minore, nella cui formazione ci entrano i detti accordi.

sono medie fra le minori, e le semidiminuite. Con ragione adunque si odono lagrimevoli i sopraccritti tre accordi, i quali comunicano una tal qualità ai Tuoni per terza minore C, F, B♭. Nell Tuono C ammette il solo accompagnamento F A♭ C, nella formazione del Tuon F ci entrano i due accompagnamenti F A♭ C, B♭ D♭ F, e finalmente il Tuono B♭ è interamente composto dai tre accordi F A♭ C, B♭ D♭ F, E♭ G♭ B♭. Un maggior grado di mestizia si esprima nei sopradditti Tuoni C, F, B♭ a misura che ricevono uno, o due, o tre dei nostri accompagnamenti, ed il ~~bravo~~ perito Compositore ne deve fare quell'uso opportuno, che il sentimento delle parole richiede.

Conclusione dell'Opera

Nel cercare per obbedirla Signor Fioravante stimatissimo la massima brevità, non vorrei aver meritata la taccia *Brevis esse laboro, obscurus fio* non già in riguardo a Lei, che colla molta, e profonda cognizione, che ha della Musica, può abbondantemente supplire a ciò, che ho dovuto tralasciare, ma si bene in riguardo ad altri ~~molti~~ parecchi, che potrebbero leggere questo ~~Compendio~~ Saggio. Spero per altro di aver espressi i miei sentimenti in maniera, che niuna difficoltà possa incontrarli chi è sufficientemente

instruito

instruito della Musica teorica.
e pratica. Comunque però sia
quella offerente questa fatica, non si potrebbe dar nome di Mercede a
la cosa, che vi resta sempre rimunerazione;
il piacere di averla nostra;
e di averle dato un contrassegno
di vera stima, e di perfetta ami-
cizia.

Della corde, o fibre elastiche.
Schediasmi fisico-matematici
del
Conte Giordano Riccati
Nobile Trivigiano.

## Prefazione.

Se mai si può sperare con fondamento di scoprire, o di porre in chiaro parecchie fisiche verità, egli è certamente quando si prende a maneggiare un qualche speciale argomento. Il piacere della musica mi ha invogliato di spendere non poche meditazioni intorno le corde solide, e fluide, colle quali essa compone la maggior parte de' suoi stromenti; ed avendo in varj tempi otto schediasmi distesi sopra questa materia, li ho nuovamente ~~previamente~~ ripigliati per mano, e ritoccati qua e là, onde con meno di verecondia possano al pubblico presentarsi.

La proporzione fra le dimensioni delle corde, e le forze che le producono non era stata per ancora esattamente determinata. La soluzione di questo problema richiedeva la preconoscenza di una proprietà delle corde elastiche, cioè che esse ripugnano alla distensione anche prima, che sia loro applicata veruna forza stirante: alla quale ripugnanza io do nome di rigidità naturale, per distinguerla dall'artificiale, che si eguaglia alla ~~nuova~~ ~~nuovo~~ di ~~renitenza acquistato dalla corda~~ forza tendente, da cui viene resa scritta la renitenza della corda a lasciarsi di bel nuovo ~~nuovamente~~ allungare. Con tale scorta io sono nello Schediasma I. pervenuto felicemente alla mèta, e la perfetta corrispondenza fra la teorica e gli esperimenti mi assicura di non avere errato. Mi è riuscito altresì di scoprire il tempo, in cui una corda si vibra per lungo, mentre il peso ad essa attaccato a vicenda ascende, e discende.* Mercè riflessione la rigidità grande delle corde di metallo, equivalendo a libre $1134 \frac{7}{13}$ la naturale rigidità della corda di ottone, tesa dal peso di due libre da me nelle sperienze adoperata. Bisogna per altro

* La trovata legge di oscillazione è diversa da quella che regola le vibrazioni trasversali delle corde a due scannelli appoggiate. Se una corda si vibra per lungo, si pongono in moto la massa della corda, ed il peso tendente; ma se oscilla di traverso, si muove la sola sua massa. In oltre trattandosi delle oscillazioni per lungo vi entra in computo la rigidità naturale della corda, la quale nella altra maniera le vibrazioni trasversali della corda medesima.

per altro distruggere la rigidità, che ripugna alla distensione delle corde, dalla tenacità che ne impedisca il compimento sino ad un certo segno. Facendo uso della regola stabilita dall'accuratissimo M. Sauveur ho trovato, che la tenacità della testè mentovata corda di ottone, era incomparabilmente minore della rigidità, siccome quella che si agguagliava soltanto a libre 12. in circa.

II. Col mezzo degli stessi discorsi usati nello Schediasma I. giungo nello Schediasma II. a discoprire la proporzione fra le compressioni di qualsivoglia fluido, e le forze che le producono. La formula esprimente la detta proporzione ci mostra a dito, che posta uguale a nulla la rigidità naturale del fluido, si dilaterebbe questo infinitamente, qualora non fosse da forza veruna compresso. Ora ella è tale la ~~proprietà~~ natura dell'aria di tanto maggiormente ~~rarefarsi~~ si, quanto più scema il peso premente, e per conseguenza essa è priva sensibilmente di naturale rigidità, e tutta la sua ripugnanza a nuova compressione dalla rigidità artificiale uguale alla pressione che soffre unicamente dipende. Inoltre l'aria si vibra colle leggi di un pendolo a cicloide, quando agitata da un corpo sonoro, ce ne porta il suono all'orecchio. Questo fluido pertanto non potrebbe oscillare in siffatta guisa, se le sue densità non fossero proporzionali ai pesi comprimenti almeno nelle minime compressioni. Ed essendomi riuscito di provare, che se le densità si adattano ad una tal legge nelle infinitesime compressioni, la debbono accettare parimente nelle finite, ella è chiaramente per vista dimostrata la proprietà dell'aria ammessa dal comune de' fisici, che le sue densità seguitano delle forze comprimenti la proporzione. Gli esperimenti sono favorevoli alla teoria quanto il comportano le particolari stravaganze

nerita

miste coll'aria, e la resistenza, che nel effettuare
i detti esperimenti si raggiona superare, e lo
scaldamento, o l'aumentazione del calore nell'
aria, che l'elasticità ne diminuisca, o ne accresca.
III Il Co. Jacopo Riccati mio Padre nel
Tomo I. de' Supplementi al Giornale di Italia
ha trattato prima di ogni altro della propor=
zione che passa fra le alterazioni sensibili, e la
forza degli obbietti esterni, da cui vengono
prodotte. Suppone egli che la forza delli ob-
bietto agisca tutta raccolta nel punto medio
di ciascuna fibra dell'organo, la quale piegan=
dosi formi un angolo; che risolta la forza
in due, che tirino direttamente le sue metà
della fibra, cagionino esse forze le distensioni
nelle mentovate due metà; e che per ultimo
le distensioni sieno proporzionali alle forze che
le producono. Ritenuta soltanto la prima sup=
posizione, e fatta la riflessione, che gli allunga=
menti nelle due metà della fibra non sono ge=
nerati dalle forze, che le tirano direttamente,
ma bensì dagli accrescimenti di tensione, che
sostengono fibra, mentre la fibra si va ripiegando,
determino la proporzione fra le forze applicate
rispondere alla metà della fibra, o corde tese,
e la saette, le distensioni, e gli accrescimenti
di tensione, che le dette forze nelle nominate
fibre cagionano. * Colla stessa condizione ragiono
della relazione fra le affezioni sensibili, e la
forza degli obbietti esterni, da cui vengono cagio=
nate; e dopo aver notato le alterazioni che producono
nelle saette, nelle distensioni, e negli aumenti
di tensione le varie misure delle lunghezze, delle
tensioni, e della rigidità delle fibre, passo alle
conseguenze fisiche, e metto sotto gli occhi di chi
legge i vantaggi, ed i discapiti degli organi, a'
quali ~~conseguenze~~ effetti ne derivano in riguardo alle
sensazioni.

* a capo

* a capo

sensazione. * Le saette determinate dalla teoria riescon le paragono con quelle sommministrate dalla sperienza, di esattissima misura delle quali si rettifico col mezzo dei suoni delle due in metà della corda piegata in angolo dalla forza, che producono le mentovate saette. Quantunque gli esperimenti vadano di accordo colla teoria con quella maggiore possibile adeguazione, che in tali ricerche può mai sperarsi, non lascio di avvertire, che se alla metà della corda si applicassero pesi notabilmente maggiori più grandi delle usate nelle sperienze che riferisco, ne risulterebbero saette alquanto minori di quelle, che richiede il mio canone, perchè in esso si è trascurata la resistenza, che a cagione della sua grossezza patisce la corda nello piegarsi in tre siti, cioè a dire a mezzo e nelle due estremità.

IV. Non si otterrà mai di trovare il tempo in cui una corda fa una vibrazione, se prima non si determina la figura, alla quale nello vibrarsi si adatta. Nella soluzione di questo Problema io da prima seguito il metodo dell' acutissimo Signor Taylor, da cui poscia mi ~~allontano per ischivare i secondi differenziali~~ Non si è accorto il lodato Scrittore, che la costante da determinarsi dopo la seconda integrazione poteva ricevere infiniti valori, ai quali corrispondono altrettante figure, a cui è concesso alla corda di adattarsi mentre si vibra. Può dunque alla corda oscillare intera con un solo ventre di oscillazione, o divisa in parti eguali con tanti ventri di oscillazione collocati a vicenda uno al contrario dell'altro quante sono le parti eguali.

Per

## Osservazione.

* Per l'intero compimento della soluzione del problema non ho tralasciato di provare, che conformata
la corda ad una delle curve determinate, e comin-
ciando poi a vibrarsi, si adatta sempre in
qualunque istante ad una curva di simil na-
tura. E conciossiachè le corde esemplificanti
di un gravicembalo si sogliano mutare all'oscil-
lazione con una penna, che in angolo le spiega,
mi è riuscito di dimostrare, che non ritengono
questa figura, ma tosto presto si adattano a quella
tra le nostre curve, che ha un solo ventre di
oscillazione. Chi confronterà la dimostrazione
del Signor Taylor colla mia, spero che di questa
resterà più contento, non avendo egli avvertito
essere bisogno della comunicazione del moto fra
le particole contigue della corda, acciocchè tutti
i suoi punti possano avere nello stesso istante
forniti di forze acceleratrici, e di velocità propor-
zionali agli spazj, che rimangono a
loro da scorrere.

Dopo le premesse speculazioni non è stato
difficile il trovare il tempo impiegato da una corda
tesa nel fare una vibrazione. La formola,
a cui si perviene, ci insegna che i tempi d'una
vibrazione della stessa corda sono proporzionali
a' termini della serie $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5} . \frac{1}{6}$ &c
secondochè oscilla intera, o divisa in due,
tre, quattro &c parti uguali; e stando al nu-
mero delle vibrazioni, effettuate in pari tempo, per cui soglio esprimere
i suoni, in ragione reciproca delle durate
di una vibrazione, la corda potrà produrre
i suoni dinotati dalla progressione 1. 2. 3.
4. 5. 6. &c essendo questi soli i suoni,
che sono atti a rendere la tromba marina
e da fiato, od il corno da caccia, la mia teoria
spiega chiaramente un tale fenomeno. * Una
corda pizzicata non si fa solamente sentire i detti

suoni

* a capo

(parole da aggiungersi) a patto che rendano un solo suono,

* a capo

suoni l'uno dopo dell'altro, ma gli unisca tutti insieme; la quale stupenda proprietà con alcuni esperimenti faccio toccar con mano. Da questa stessa proprietà si deduce la legge della comunicazione dei moti sonori da una corda all'altra, e col mezzo di essa si rende ragione della bellissima esperienza del celebre Signor Giuseppe Tartini, il quale ha scoperto, che stimolate colli arco due corde del violino, i di cui suoni si esprimano in numeri fra loro primi, purchè il più piccolo di questi numeri non passi l'unità, si oda sempre in essa un terzo suono dalla detta unità dinotato. Che se si finga una corda infinitamente lunga, una porzione finita ~~di questa~~ di questa corda, atta a generare qualivoglia suono, sarebbe parte aliquota della lunghezza infinita e quindi la mentovata corda potrebbe in se stessa ricevere qualunque suono. La esposta riflessione mi dà coraggio di arrischiare una conghiettura intorno la maravigliosa ~~stupenda~~ struttura dell'organo dell'orecchio.

Il Dottissimo Signor Giacopo Eulero ha tentato negli Atti di Lipsia dell'anno 1759. di trovare il tempo periodico di una corda sonora, che si vibra, senza prima indagare la curva, alla quale si adatta la predetta corda oscillando. Non accordandosi colla mia formola quella del Signor Eulero, mi sono posto ad esaminare la sua soluzione, la quale senza dubbio, è per più titoli difettosa. Conciossiachè il sunnominato Autore abbia sbagliato ~~nella~~ nel determinare la ragione centrifuga della curvità della corda, poco vedere che nella mia soluzione facilmente ne ho conseguita la vera ragione; ed una

Proposizione.

d'una riflessione aprendo la strada ad un'altra, dimostro che i punti della corda non si movono per le ordinate della curva da me determinata, ma bensì per segmenti di parabole Apolloniane, i quali e nella grandezza, e nella posizione si adeguano colle predette ordinate. Mi involvo poscia a cercare col metodo delle serie, fondamento principalissimo della Meccanica, la curva, a cui dee conformarsi la una corda oscillando, e mi si presenta la stessa curva colla prima soluzione scoperta.

Ella è ~~maravigliosa~~ ammirabile la proprietà delle corde sonore, che la rigidità naturale nulla altera i tempi delle loro minime vibrazioni trasversali. Si spiega chiaramente questo fenomeno col provare, che la diversità della rigidità ~~natura~~ non cagiona computabile alterazione nelle velocità dei punti analoghi di due corde, che nel solo elemento della rigidità differiscono.

Do fine allo Schediasma IV. avvertendo, che sebbene abbia supposte infinitesime le vibrazioni delle corde sonore, le verità da me dimostrate si adattano alle minime perchè oscillazioni, le quali o più ristrette, o più dilatate conservano sempre lo stesso tempo. La conformità della mia soluzione coi fenomeni si fa toccare con mano, che ai numeri geometrici si devono surrogare sostituire i numeri fisici.

V. + L'aria è il corpo che suona negli strumenti da fiato, e la corda di aria contenuta dentro una canna cilindrica di organo fa le sue vibrazioni non altrimenti che una corda solida, essendo questa resa elastica da una forza spirante, e quella da una forza premente. Quindi la stessa formola determina i tempi delle oscillazioni tanto delle corde solide, quanto delle fluide, e poichè nelle seconde la forza comprimente stanno come le loro basi, o come i quadrati dei loro diametri,

(Parole da levarsi)

(Passo da aggiungersi)

+ Pretendendo i sommi Geometri li Signori di Alembert, Leonardo Eulero, e Luigi De la Grange, che altre le figure da me determinate possa una corda che si vibra prenderne infinite tutte fra loro diverse, ed al contrario sostenendo il celebre Sig.r Daniello Bernoulli, che la soluzione del Sig.r Taylor è sola capace di soddisfare a tutti li casi possibili del problema, di cui si parla; do fine allo Schediasma IV. col mettere in chiaro la ragione, che mi persuade di aderire alla sentenza di questo Matematico inglese.

i tan:

Orazione.

i tempi delle vibrazioni: mantenuta la proporzione delle lunghezze di esse corde, purchè a cagione del freddo, o del caldo non si muti la proporzione fra la densità dell'aria, ed il peso ~~[illegible]~~ che la comprime. Serve la medesima formola anche per ritrovare il tempo, in cui il suono si diffonda per un dato spazio, e perciò una corda d'aria nel fare una vibrazione, ed il suono nel viaggiare per uno spazio eguale alla lunghezza di essa corda ci impiegano pari tempo. E conciossiachè il suono cammini alquanto più lento l'inverno, ed alquanto più celeremente la state, una canna di organo per conseguenza renderà nella fredda stagione un suono un poco più grave che nella calda. Si inganna il dottissimo Sig. Eulero attribuendo tutta agli stromenti da fiato la varietà accidentale di un suono, che si osserva nelle contrarie stagioni di inverno, e di estate paragonandoli cogli stromenti da corda; imperciocchè da me si dimostra, che questi più di quelli sono soggetti ad alterazione. Una corda aerea non meno che una solida può generare i suoni 1. 2. 3. 4. 5. 6. (e tali effettivamente li producono la tromba, ed il corno da caccia) secondo che tutta o intera, o divisa in parti aliquote: ed intanto i raggi sonori ci portano i suoni tutti all'orecchio, in quanto che si possono considerare siccome corde di infinita lunghezza, e qualunque corda finita atta a rendere un determinato suono, e parte aliquota di una corda infinita. Riesce adunque inutile la ipotesi di M. de Mairan, che si è immaginato l'aria composta di particole di tutti i tuoni, fra le quali ogni suono faccia vibrare la unisona. Colla considerazione dei suoni della tromba deduco all'incontro questa opinione, non essendo concepibile il perchè non

possano

possano oscillare dentro la tromba le particole
di suono medio fra 1. e 2. fra il 2 ed il 3. fra
il 3. ed il 4. Con le spiegate leggi regolano
altresì le vibrazioni delle corde di aria contenute
nelle canne convergenti, divergenti, e di qual
si voglia diversa figura.

Dalla velocità del suono io deduco il
numero di vibrazioni, che fa una corda d'aria
in un minuto secondo, e paragonando quello
che risulta dal computo cogli esperimenti dell'
accuratissimo M. Sauveur dimostro col razio-
cinio, e colla esperienza, che una corda d'aria di
aria dentro una canna cilindrica d'organo, a ca-
gione di replicate riflessioni che succedono, è
allungata più della canna suddetta. Quindi
na si spiegano sicure le ragioni, per
cui il suono di una canna cresca, o cali
allargandone o restringendone l'apertura su-
periore, e discenda all'ottava grave quando la
detta apertura totalmente si chiuda. Il sopra
lodato Signor Eulero stabilisce troppo scarso il
numero delle vibrazioni effettuate da una can-
na d'organo in un minuto secondo, perchè
in cambio d'indagare la densità dell'aria
pura e sonora, introduce nella formola quella
dell'aria mista colle particole eterogenee.
Il numero delle oscillazioni da lui determinato
discorda sensibilmente dalle osservazioni di
M. Sauveur, non potendosi mai presumere
che un uomo così diligente abbia di tanto
sbagliato.

VI. Uno stromento musico riuscirà perfetto,
se renderà suoni della stessa indole, gravi, e forti
~~a forti~~ egualmente. Egli è noto quanto gli arte-
fici abbiano posto di studio nella fabbrica degli
stromenti, ed in fatti avendo io cercato le mi-
sure, che debbono assegnarsi alle corde di uno

stromento

strumento, od alle canne di organo, acciocché rendessero suoni del pari forti, e aggradevoli, ho scoperto che la pratica, e la teoria vanno perfettamente d'accordo.

Io non riferirò il lungo giro di raziocinio, col quale dimostro, che due corde rese da forze proporzionali alle loro basi, e formate nelle oscillazioni di eguali forze vive generano suoni del pari forti: dirò bensì qualche cosa dei limiti che stabilisco, affinché i suoni egualmente gravi si sentano. La corda grave per tanto paragonata colla acuta non ha da essere più sottile, né oscillando dee muoversi per uno spazio più piccolo. Le corde egualmente grosse formano il primo limite, ed il secondo è determinato dalle corde, che si vibrano per uguali spazj, le quali deggiono avere le grossezze proporzionali alle lunghezze, di separati ove vive hanno da forza acquistano nello vibrarsi. In quegli strumenti, ne' quali assegnandosi a ciascun suono la sua corda particolare, ci è un pieno arbitrio, la arte sta di mezzo fra i due confini estremi, assegnando alle corde grossezze tali, che stanno in ragione mezzana fra quella di egualità, e quella delle lunghezze: e così effettivamente si pratica nei gravicembali.

Egli è di uopo ricorrere al primo limite in quegli strumenti, nei quali la stessa corda rende più suoni per opera delle dita della mano sinistra, che in diversi siti la premono. In tale circostanza le corde, che suonano, egualmente grosse, e varie solo nella lunghezza acquistano velocità in siti analoghi che stanno in ragione inversa dimezzata de' tempi delle loro vibrazioni. Ma prendasi

in si

## Prefazione

in sì fatti stromenti trapasso da una corda all'altra, mi sono posto ad indagare qual proporzione debba assegnarsi alle diverse grossezze, acciocchè passando da corda a corda, la medesima legge delle velocità si conservi, e ritenendo i suoni la stessa indole, l'orecchio non si avveda, che ad una corda anzichè all'altra appartengano. Le grossezze adunque delle corde hanno da riferirsi nella proporzione dei tempi delle loro vibrazioni, e l'esperienza fatta sopra le corde del violino mi ha reso certo, che la pratica si conforma colla teoria.

Preso ad esaminare un gravicembalo lavorato da Vito dei Trasuntini l'anno 1559. ho trovato, che le grossezze delle corde stanno quasi esattamente di mezzo fra i due stabiliti confini, e che le predette corde acquistano eguale forza, mentre che oscillano. In tutti i gravecembali, e le spinette da me osservati, posto al paragone la corda grave colle acute, la ho rinvenuta alquanto più corta di quello richiede la proporzione fra i tempi delle loro vibrazioni. Da ciò ne nasce la conseguenza, che le corde gravi relativamente alla loro grossezza sono un po meno tese delle corde acute. Ora io rendo ragione di questa costante pratica, e finalmente noto non essere arbitrario l'armare uno stromento con corde di qualunque grossezza, ed armato che sia lasciar fare a capriccio varie tensioni alle corde. L'esperienza uniforme alla teoria ha insegnato ai pratici le convenienti grossezze delle corde, e la congrua misura delle tensioni, dove pieno che eguali delle penne per interamente pareggiare il rigore dei suoni.

Colla scorta delle verità poste in chiaro rispettivamente alle grossezze delle corde dei gravicembali, si determinano agevolmente le misure, che debbono assegnarsi alle canne

di organo

di organo; ancorché rendano suoni del pari forti, e aggradevoli. Quello che risulta dai miei discorsi si è, che moltiplicando per le lunghezze delle canne ~~le~~ le potestà delle lunghezze, in cui si riferiscono le grossezze delle corde dei gravicembali; ne nascono prodotti, ai quali le basi delle canne di organo hanno da esser proporzionali. Le grossezze delle corde accettino una ragione esattamente media fra i due limiti sopra statuiti, e si corrispondano nella proporzione delle radici delle lunghezze; si moltiplichi questa per la ragione delle lunghezze, e ne proverrà una terza ragione come le radici dei cubi delle lunghezze, che alle basi delle canne di organo dovrà dar regola. Conseguentemente i diametri, o le circonferenze di esse canne ~~dovranno~~ da essere come le radici quadrato-quadrate dei cubi delle loro lunghezze.

L'organo di questa Cattedrale è un'opera molto perfetta lavorata da Urbano da Venezia l'anno 1480. Misurate diligentissimamente coll'ajuto del Signor Liberale Marcuzzi valoroso Organista le circonferenze di alcune canne, ho trovato che la pratica conviene esattamente colla teorica ~~con que~~

VII Negli strumenti naturali o artificiali da fiato viene determinato il tuono o da quell'ingegno, col quale si genera il suono, che rispettivamente ad alcuni strumenti chiamerò imboccatura, o dalla lunghezza della corda di aria contenuta dentro il corpo di essi strumenti. Seconda il tuono una sola di queste cause, se dall'altra è molto più forte, e se ciò non si

avvera

avvera, egli è di uopo che le due cagioni si
uniscano a produrre lo stesso tuono, onde non
si oda un suono falso, ed ~~incomodissimo~~ ingrato.
Spiegato il modo, col quale l'aria concepisce
il suono, noto che dall'imboccatura dipende il
tuono del pifferino, delle pive dei fagotti, e
degli oboè, e di vari registri di organo con piva
come per esempio dei tromboncini. Se vi ha corda
di aria in questi stromenti, dalla sua lunghezza
non trae l'origine il tuono, ma la canna serve
soltanto a dar maggior corpo alla voce.

Alla stessa classe apparterrebbe ~~apparterrebbe~~
anche la voce dell'uomo, e di altri
animali, se conforme la sentenza dell'ingegnoso M. Dodart
i tuoni di essa derivassero dalla varia apertura
della glottide. Frattanto il dotto M. Ferrein
ha scoperto, e con accuratissimi sperimenti con-
fermato, che le due labbra della glottide più
o meno tese a dovere cagionano della voce
i diversi tuoni. Dunque, a parer non prendo
errore, che i due lodati Scrittori insieme concor-
rono, ~~facendo la~~ riflettendo essere con-
trario a ragione alla maggior perfezione della voce, che
l'apertura della glottide, e la tensione delle sue
labbra ~~gli approvassero~~ si uniscano nella determinazione del medesimo tuono; calando quella
colla debita proporzione, mentre questa si
aumenta. In siffatta guisa nulla perdono di
sostanza le belle considerazioni di M. Dodart intorno alle menomissime alterazioni dell'apertura
della glottide, che non supera una linea, qualora
si passa per minutissimi gradi dal grave all'acuto,
e pure non mutando tuono si fa transito con
sensibilissimi movimenti, o decrescenti dal piano
al forte, o a rovescio dal forte al piano.

Benchè il tuono delle canne di organo
del flauto, del flauto traverso ~~traversiere~~, dell'oboè, ~~e~~ dipenda
dalla lunghezza della corda di aria, che si mette
in oscillazione, nulladimeno bisogna talmente

regolare

regolare l'imboccatura, che il fiato potea concepire un suono unisono alla corda predetta. In fatti nella tromba, secondochè l'imboccatura opportunamente si modifica, suonano o la corda intera, o le sue parti aliquote. Adattata al fagotto la pivetta dell'oboè, in cambio della corda intera, suonerebbero o la metà, o la terza parte si udirebbero.

Terminato lo Schediasma VII. col riferire un'esperienza, la quale ci fa toccare con mano, che negli strumenti da fiato l'imboccatura, e la corda d'aria determinano il suono, il quale obbedisce a quello de' due elementi che ha maggior forza. Se la corda di aria è assai corta, la varia imboccatura ottiene considerabili cangiamenti di suono, i quali vanno divenendo sempre minori, conforme che la corda di aria si allunga. Si ode il suono falso, quando colla imboccatura tento di alterare il suono di una lunga corda di aria. In sì fatta circostanza si mescolano insieme due suoni, uno proprio della imboccatura, e l'altro della corda di aria mentovata, e da questa mistione il suono falso ha l'origine.

VIII. Lo Schediasma VIII. è da cinque brevi Dissertazioni formato, ed ha per argomento la propagazione dei tremiti sonori nell'aria.

1. Suppongo nella prima Dissertazione, che il suono si propaghi per linee o raggi, che partono dal corpo sonoro quasi da centro, e che tutti i punti aerei contenuti nel medesimo raggio si vibrino per eguali spazj. Tra' fenomeni, cioè a dire che oscillando un corpo sonoro sento in diverse distanze lo stesso suono sia riguardo al grave e all'acuto, che portandone l'aria all'orecchio più suoni, che differiscono soltanto nel

piano

piano o nel forte, debbono le sue particole
necessariamente vibrarsi colle leggi di un pen-
dolo in cicloide, onde il suono viaggi
equabilmente, mi aprono la strada a spie-
gare il quarto fenomeno, che al cessare
delle oscillazioni del corpo sonoro, cessano
altresì le agitazioni nell'aria. Dimostro
che le particole aeree nell'atto di ridursi alla
quiete riacquistano la loro ordinaria compres-
sione, e che, accostandosi in allora alla quiete
dell'equilibrio, se questo non viene tolto
da una nuova oscillazione o reciprocazione
del corpo sonoro, più non si muovono.

Determino poscia gli spazj scorsi dai
varj punti di una linea aerea nell'istante
che il primo punto della stessa viaggiando per
un dato spazio ha fatto una mezza vibrazione.
e conosciutosi che questi spazj sono, a grado a grado
minori, secondo che le particole sono più distanti maggiormente
dal principio dell'onda, si comprende che le pres-
sioni [illegible] dalla differenza delle compressioni
di due particole contigue nasce la forza solle-
citante alla oscillazione la particola [illegible] con-
[illegible] che si [illegible] in forza acceleratrice
qualora si divida per la massa della mento-
vata particola. Essendomi riuscito di provare
le forze acceleratrici proporzionali agli spazj
da percorrersi, si scopre pertanto nell'aria
il moto simile a quello di un pendolo a ci-
cloide, che dalla scuola dei fenomeni [illegible]
da me [illegible] rapporto.

Passo a stabilire la velocità colla
quale si propaga il suono, e ne deduco per
corollario, che nel tempo di una vibrazione
di una canna di organo il suono si propaga diffonde
ad una distanza eguale alla lunghezza della
corda di aria dalla canna compresa. Ho
nominato pertanto la lunghezza della corda di aria

cia

la lunghezza
che quella della canna; perchè conforme l'ho avvertito nello schediasma V. quella è in tanto maggiore di questa. Si raccoglie dalla formola della velocità del suono, che essa stessa viaggiare o sia esso debole o forte, grave od acuto, camminerà egualmente veloce. Il caldo diminuisce la densità dell'aria, il freddo l'accresce, e quindi la formola mentovata ci insegna, che la celerità del suono nella state è maggiore che nell'inverno, la qual verità dall'accuratissimo Signor Lodovico Bianconi è stata confermata colla sperienza.

Se per ridurre a computo la velocità del suono, si introduce nella formola la densità dell'aria mista colle particole stravaganti, la quale sta a quella del mercurio come 1 : 11826, si scoprirebbe in un minuto secondo dovrebbe il suono viaggiare piedi parigini 912, mentre realmente ne scorre 1038. Ha ottimamente avvertito il Cav. Newton, che dette particole straniere poco elastiche, e meno compatibili non sono atte a concepire le vibrazioni sonore; e quindi preso siccome dato il viaggio del suono manifestatoci dagli esperimenti, col mezzo della nostra formola stabiliremo la densità dell'aria pura e sonora, che nelle medie stagioni si riferisca a quella del mercurio nella proporzione di 1 : 15294.

La proprietà che una canna di organo fa una vibrazione nel tempo stesso in cui il suono si propaga per uno spazio eguale alla lunghezza della corda di aria contenuta

dentro

Prefazione.

dentro la canna già descritta. Si scova per
calcolare la velocità del suono, se ~~[illegible]~~
potessero supporsi degli archi uguali la corda di
aria e la canna. Ammessa questa supposizione
ed appoggiandosi agli esperimenti di M.
Sauveur intorno alle vibrazioni delle canne di
organo di cinque piedi ~~[illegible]~~ che il suono, il quale di-
fatto si cammina piedi 1036 in un minuto se-
condo, ne dovrebbe scorrere 1020. ~~[illegible]~~ Quindi Mediante
~~[illegible]~~ il viaggio reale del suono ~~[illegible]~~ sta-
bilisce la proporzione come 1020 a 1036
o sia prossimamente come 58 : 59, fra
la lunghezza di una canna d'organo di cinque piedi, e quella
della tortuosa corda di aria, che dentro la
canna stessa va serpeggiando.

2. Il metodo da ~~me usato nella prima~~
Dissertazione è ~~sostanzialmente~~ ~~lo stesso~~ coincide con
quello del Sig. Newton, il quale ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ ~~da quanto~~ ~~[illegible]~~ sommi ~~[illegible]~~
stato incolpato ~~di petizion di principio~~ da
seconda ~~Dissertazione~~ ~~[illegible]~~ fu manifesta-
mente toccar con mano non esser giusta
l'accusa; imperciocché supponendo che le
particole ~~[illegible]~~ situate nel medesimo rag-
gio sonoro si vibrino a guisa d'un pendolo a cicloide ~~[illegible]~~ spazi ~~[illegible]~~ vadano
scemando secondoché le particole stesse
sono più rimote dal centro sonoro, si
ricava dallo stesso metodo come nella
prima Dissertazione? ~~[illegible]~~ che le forze accele-
ratrici non sono proporzionali agli spa-
zi da percorrersi, e che per conseguenza non potrebbe (come s'era [illegible])
l'aria nella mentovata ipotesi ~~[illegible]~~
oscillare colla legge di un pendolo a ci-
cloide. Se il metodo peccasse di petizion
di principio, dovrebbe scoprire anche in ~~[illegible]~~
contro le forze acceleratrici come gli spazi da scorrersi;
ma succedendo il contrario, cade l'accusa, ed
il metodo si dimostra incolpabile. Incorrerei

nella

(Resto da aggiungersi)

Conciossiaché il Dottis-
simo Sig.r Luigi de
la Grange nel Tomo se-
condo della Regia Società
di Torino condanni il
metodo da me seguito,
col quale il Cav. Newton
determina la velocità
del suono; prendo dello
stesso metodo la difesa,
e mostro che le formole
del Sig.r de la Grange
ridotte al giusto con-
ducono alle medesime
conseguenze che dal Newton,
che egli avea giudicato
ripugnanti alla natura
dell'aria

2. Essendo il Sig. Newton
stato incolpato di petizion
di principio; la seconda
Dissertazione fa manifesta-
mente toccar ~~[illegible]~~

nella petizion di principio, se dalla supposizione che le particole aeree oscillino non altrimenti che un pendolo a cicloide, io deducessi che le forze acceleratrici si proporzionano nella ragione degli spazj, che restano da passarsi. Questa non è la strada che ho battuto. Dal moto supposto io raccolgo la comparazione delle particole, e dalla comparazione le forze acceleratrici, le quali trovandosi andare soltanto nella supposizione che il suono si propaga per linee o raggi, e che le particole tutte collocate nello stesso raggio si vibrino per eguali spazj, si rende manifesta l'aggiustatezza del metodo.

3. Esamino nella terza dissertazione se l'aria possa vibrarsi colla legge dei pendoli a cicloide nella supposizione che il suono per settori sferici si propaghi, e presentandomisi forze acceleratrici, che non abbracciano la proporzione degli spazj da percorrersi, dimostro non essere possibile che il suono si diffonda in tal guisa. Ponendo anche qui in opera il metodo delle due prime dissertazioni, sempre più si conferma, ch'esso va esente dalla nota di petizion di principio:

4. L'eruditissimo Signor Leonardo Eulero nella dissertazione sopra la natura del fuoco stabilisce la velocità del suono con una formola differente dalla Newtoniana da me primamente abbracciata. Quindi con essa trovata la velocità del suono maggiore del giusto anche quando si introduce nel calcolo la densità dell'aria mista colle particole eterogenee, molto peggio succederebbe se si mettesse a computo la densità dell'aria pura ~~la densità~~, la quale sola principalmente è capace di ricevere e di comunicare le vibrazioni sonore. Ora quantunque questa sola riflessione discopra

le

la falsità della formola del commendato Scrittore, ho dedotta da essa la curva, che relativamente alla distanza dal primo punto di una corda aerea determina gli spazj scorsi dai punti della corda stessa nell'istante che il primo punto ha una mezza vibrazione compiuto, e mettendoci la mentovata curva sotto gli occhi in pezzo ignudo, ho fatto toccar con mano, che la formola del Signor Eulero non si accorda col vero. E vaglia il vero secondochè le particole aeree si discostano dal principio del raggio sonoro, i detti spazj vanno scemando, in un dato punto lo spazio è nullo, diventano poscia gli spazj negativi, e finalmente lo spazio torna ad uguagliarsi al nulla in un altro punto. Nella mezza vibrazione del primo punto del raggio scorgo la ragione, per cui tutti i punti sino al primo punto di quiete si abbiano da movere per la medesima direzione. Ma passato il punto immobile non giungo ad intendere qualmente i punti situati tra i due punti di quiete possano oscillare per la direzione contraria.

Partecipati questi miei pensamenti al Dottissimo P. D. Paolo Frisi, mi propose di rintracciare, se si potesse salvare la formola del Signor Eulero, supponendo che tutte le particole di aria componenti l'onda, benchè nello stesso tempo compiano il movimento, non lo comincino però nell'istante medesimo, di modo che da una all'altra successivamente il movimento si comunichi. Accettata questa supposizione siccome vera, le particole aeree impiegherebbero nell'oscillare un tempo tanto più piccolo, quanto fossero più prossime all'ultimo punto dell'onda. Perciò ogni particola produrrebbe un suono diverso, il quale si sentirebbe viè più acuto, secondochè l'orecchio si avvicinasse al fine dell'onda: ma in qualsivoglia sito si oda

lo stesso suono unisono a quello del corpo sonoro; dunque le vibrazioni delle onde aeree non si conformano alle ipotesi proposta da esaminare.

A questa palpabile osservazione aggiungasi la costruzione della curva determinante gli spazi scorsi dalle particole aeree contenute nell' onda stessa, quando nel medesimo istante hanno compiuta una oscillazione, e mi si presentano dei pezzi eccedenti maggiori di quello nella quarta dissertazione considerato.

Oltre a ciò essendo innegabile, che le particole aeree ricevono dal corpo sonoro la forza necessitata nell' oscillare, ne risulta è ripugnante conseguenza, che la medesima forza delle mentovate particole supererebbe quella del corpo sonoro, di modo che l' effetto eccederebbe la propria cagione.

Concludendo finalmente col provare, che il moto non potrebbe far transito da un' onda all' altra, ma nella sola onda primaria sarebbe obbligato a fermarsi, ne inferisco dall' aggregato dei notati inconvenienti dovessi cancellare, l' ipotesi, di cui si parla, dal libro della Natura.

Indice degli schediasmi

Schediasma I. Della proporzione fra le distensioni delle corde, e le forze che le producono. . . . . . . . . . . pag. 1.

Schediasma II. Della compressioni dell'aria . . . . . . . pag. 22.

Schediasma III. Della proporzione fra le forze applicate a squadra alla metà della corda tesa, ed i varj effetti da esse forze cagionati. Colla stessa occasione si ragiona della proporzione che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte . . . . . pag. 39.

Schediasma IV. Della vibrazioni delle corde sonore. . . . pag. 75.

Schediasma V. Delle vibrazioni delle corde aeree. pag. 119.

Schediasma VI. Della misura, che debbono assegnarsi alle corde di uno stromento, ed alle canne di organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli. pag 141

Schediasma VII. Delle due cagioni determinanti il suono negli stromenti naturali, o artificiali da fiato. pag. 169.

Schediasma VIII. Della propagazione dei tremiti sonori nell'aria. pag. 183.

Dissertazione I. Della propagazione del suono per linee o raggi, che partono dal corpo sonoro quasi da centro, supponendo che tutti i punti aerei contenuti nel medesimo raggio si vibrino per eguali spazj. pag. 183

Dissertazione II. Della propagazione del suono per linee o raggi, supponendo che al crescere della distanza dal corpo sonoro le particole aeree si vibrino per ispazj, che vadano decrescendo. pag. 211

Dissertazione III. Della propagazione del

## Indice degli schediasmi.

del suono per settori sferici. pag. 225.

Dissertazione IV. Esame della formola del Signor Leonardo Eulero abbracciata nella dissertazione sopra la natura del fuoco, la quale determina la velocità della propagazione del suono nell'aria. pag. 236.

Dissertazione V. Esame della ipotesi proposta dal dottissimo P. D. Paolo Frisi, che sebbene tutte le particole d'aria componenti l'onda nello stesso istante finiscono di muoversi, non cominciano però le loro vibrazioni nell'istante medesimo, di modo che successivamente si propaga il tremito da una all'altra. pag. 249.

## Schediasma I.

### Della proporzione fra le distensioni delle corde, e le forze, che le producono.

1. Maneggiando questo stesso argomento il Conte Jacopo Riccati mio Padre in una sua Dissertazione pubblicata nel Tomo I. dei Comentarj dell'Accademia di Bologna, e poscia ristampata nel Tomo III. delle sue Opere, suppone che leggi simili diano norma e alle consuete vibrazioni delle corde, che oscillano di traverso a due scannelli appoggiate, e alle vibrazioni delle corde, che oscillano per lungo, mentre il peso tendente a vicenda ascende e discende. La prima supposizione ne chiama due altre, cioè che le corde sieno prive di naturale rigidità, e che il peso stirante sia minimo in relazione alla massa delle corde; ammesse le quali circostanze, osserveremo in progresso, che da canoni analoghi vengono regolati i due descritti generi di vibrazioni. Due rigidità vogliono nelle corde distinguersi: l'una, ch'io chiamo naturale, consiste in quella ripugnanza, che ha la corda a lasciarsi allungare anche prima che le venga applicata veruna forza tendente; l'altra, che chiamo artifiziale, si eguaglia all'accrescimento di ripugnanza per essere ulteriormente distesa, che dalla forza, o peso tendente nella corda proviene. Le due rigidità si possono parimente nominare intrinseca, ed estrinseca; dipendendo quella da cagione interna, cioè a dire dalla struttura della corda, e dallo intralciamento delle sue fibre, e questa da cagione esterna, cioè a dire dalla forza stirante. Concciossiachè ella è considerazione assai geometrica, che finora si assumeva corde solide

priva

prive di naturale rigidità; stimo opportuno, accostandomi più alla Natura, di mettere a computo il detto elemento nella soluzione del seguente problema, e di supporre altresì finita la proporzione fra le masse delle corde, ed i pesi tendenti.

Trovare la proporzione fra
gli allungamenti delle corde,
ed i pesi, o forze che li
producono.

II. Prima di tutto egli è necessario di porre in chiaro, quali sieno quelle forze o pesi, che producono gli allungamenti nelle corde. Sia la corda AB (fig. 1.) tesa dal peso P, con cui stia in equilibrio; egli è certo che per allungarla, sarà di uopo aggiungere al peso P un nuovo peso, per esempio p. Si ponga in B un impedimento NO, il quale non permetta che il punto B della funicella AB possa muoversi da B verso A, e levato poscia il peso P, la corda AB eserciterà contro lo impedimento NO quello stesso sforzo, che esercitava contro del peso P. Se torneremo ad attaccare alla corda un peso o minore, o uguale a P, non cagionerà questo veruna distensione, impiegandosi tutta la sua energia o a minorare, o a togliere interamente di mezzo il contrasto dell'impedimento NO colla corda AB, il quale, tornato ad appendersi alla stessa il peso P, non soffrirà più veruna fatica. Chi vorrà dunque allungare la corda AB, dovrà applicarle un peso P+p maggiore di P, ed il peso p aggiunto al dato P sarà quello, che produrrà in essa la distensione.

III. Dilucidato un tal punto a solo fine di evitare gli sbagli, avanziamoci a ricercare l'allungamento inassegnabile dl operato nella corda qualunque AB, la cui lunghezza L+l, dalla forza

minima $dp$ aggiunta alla forza, o peso finito $P+p$ stirante la corda stessa. Avvertasi che per $L$ si intende la lunghezza della corda corrispondente al peso conosciuto $P$, e per $l$ la distensione cagionata dal peso variabile $p$. Più elementi possono influire nel mentovato allungamento, la forza $dp$, la lunghezza della corda $AB = L+l$, il peso tendente $P+p$, la rigidità naturale della corda, la grossezza della corda

Canone I.

Essendo tutti gli altri elementi pari, la distensione $dl$ è come la forza minima $dp$, che la genera.

Qualunque sia la curva $bDZ$ (fig. 2.), che determina la relazione fra le distensioni $bc$, $bC$ della corda $Ab$, e le forze $cd$, $CD$, che le producono; una sua minima porzione $bD$ si confonde colla linea retta. Posto adunque che le forze $cd$, $CD$ siano minime, avremo $bc : cd :: bC : CD$; e perciò la distensione $dl$ è come la forza minima $dp$, che la genera.

Canone II.

Essendo gli altri elementi dati, la distensione $dl$ è come la lunghezza $L+l$ della corda.

La citata Dissertazione di mio Padre mi somministra la dimostrazione di questo secondo Canone. Pendano da due chiodi $A$, $a$ (fig. 3.) le due corde $AB$, $ab$ differenti solo nella lunghezza. Prendasi nella corda $AB$ la parte minima $AL$, e qui nel punto $L$ s'applichi il peso dato $P$, che stirando la fibra $AL$, produca la distensione $LM$. Nell'altra corda $ab$ parimente si pigli la parte $al = AL$, e adattato lo stesso peso in $l$, segua la distensione $lm = LM$. Il punto $m$ si renda immobile con un chiodo, dimodochè la fibra $am$ non possa accorciarsi. Presa nuovamente nella medesima corda la porzione $mn = AL$, agisca il peso $P$ nella fibra $mn$, ed effettuata la seconda distensione $no = LM$, il

punto

punto o come prima si fermi con un altro chiodo. Ripetuta in sì fatta guisa l'operazione, dall'ultima fibra, che si stabilisca essere op, liberamente penda lo stesso grave P, e sia pq = LM l'ultimo allungamento

Concossiachè le due fibre ugualmente stirate am, mo tentino di restituirsi alla consueta lunghezza, e siena impedite dai due chiodi a, ed o, egli è manifesto che il chiodo frapposto m è tirato all'insù, e all'ingiù da forze uguali costituenti fra loro equilibrio. Similmente le due fibre mo, oq sono in equilibrio rispettivamente al chiodo o; imperciocchè la prima contro i chiodi m, o, e la seconda contro il chiodo o, ed il grave sospeso al punto q esercitano la medesima forza, ma per contrarie direzioni. Per la qual cosa levati i chiodi intermedj m, ed o, non si distrugge l'equilibrio, e rimanendo il tutto nello stesso stato, il grave P non ascenderà, nè discenderà; e quindi ne segue che tante saranno le distensioni, quante le fibre, e che l'allungamento di tutta la corda ab, ch'equivale a tutti gli allungamenti delle sue parti, all'allungamento della fibra Ad, o di tutte le fibre componenti la corda AB si riferirà come lunghezza a lunghezza. Lo stesso discorso si adatta anche al caso, che le corde AB, ab differenti soltanto nella lunghezza stiano in equilibrio col peso P+p, a cui si aggiunga il peso infinitesimo dp, il quale cagionerà distensioni proporzionali alle lunghezze, onde sia sempre dl come L+l.

Canone III.

Posti costanti tutti gli altri elementi, e nulla la rigidità naturale della corda, la distensione dl è inversamente come il peso P+p tendente la corda.

Supponendosi nulla la rigidità naturale della

della corda, la forza P+p si eguaglia alla rigidità artificiale di essa corda, con cui sta in equilibrio. Un peso adunque minimo proporzionale a P+p produce un allungamento costante; e per conseguenza fatto uso del primo canone, un peso costante $dp$ genera l'allungamento $dl$ in ragione inversa del peso tendente P+p.

Canone IV.

Posti tutti gli altri elementi pari, e nullo il peso tendente la corda, l'allungamento $dl$ sta in ragione reciproca della rigidità naturale $r$ della corda.

La dimostrazione di questo canone è affatto simile a quella del canone precedente.

Canone V.

Se due corde non differiscono, salvo che nella rigidità e nel peso tendente, la distensione $dl$ cagionata dalla stessa forza minima $dp$ è in ragione inversa della somma $r+P+p$ della rigidità e del peso tendente, cioè a dire $dl$ come $\frac{1}{r+P+p}$. Ho detto della somma, e non del prodotto, perchè se fosse $dl$ come $\frac{1}{r\cdot P+p}$, si incontrerebbe nell'assurdo, che supposto uguale a nulla il peso tendente P+p, la distensione $dl$ si scoprirebbe infinita.

Questo canone non è, che una conseguenza dei canoni terzo, e quarto insieme combinati.

Canone V.

Se gli altri elementi tutti saranno costanti, nulla la naturale rigidità di due corde, ed inequali solamente le basi, un pari allungamento $dl$ verrà prodotto dalla forza minima data $dp$.

Si considerino le due corde come fasci inequali di funicelle di pari diametro. Il numero delle funicelle di un fascio al numero delle funicelle dell'altro fascio starà come la base di una corda a quella dell'altra. Tanto nel fascio picciolo, quanto nel grande si concepiscano e il peso tendente P+p, e la forza minima $dp$ divisi in

tanto

tanto numero di parti eguali, quante sono le funicelle componenti un fascio, e si scoprirà che a due funicelle a diversi fasci appartenenti toccano i pesi tendenti, e forze minime, che si corrispondono in ragione inversa delle basi delle corde. Essendo dunque nelle dette funicelle le forze minime come i pesi tendenti, combinati i canoni primo, e terzo, si troverà costante la distensione $dl$ in ambe le funicelle. Quello, che si è detto di una funicella, si può applicare a tutte l'altre componenti la stessa corda, ed indi cavare la conseguenza, che sono eguali le distensioni di due corde, la cui rigidità naturale sia nulla, ed in cui tutti gli altri elementi, a riserva delle basi sieno comuni. Questo sesto canone si uniforma col terzo, il quale considerate due corde, in cui l'unico elemento variabile sia il peso tendente $P+p$, e la rigidità naturale uguale a nulla, stabilisce la distensione $dl$ in ragione inversa del peso tendente, o sia come $\frac{1}{P+p}$. Supposta costante $P+p$, si trova parimente costante lo allungamento $dl$, come vuole il sesto canone. Quindi i canoni terzo e sesto si uniscono in un solo, nè trattandosi di corde, la cui rigidità naturale sia nulla, importa in riguardo alle distensioni considerare lo elemento della varia grossezza.

Canone VII.

Essendo costanti tutti gli altri elementi, e nullo il peso tendente, le distensioni di due corde differenti di grossezza serberanno la ragione inversa delle naturali rigidità, e si verificherà essere $dl$ come $\frac{1}{r}$.

Avvertasi che il quarto, ed il settimo canone sono una cosa stessa. Amendue suppongono nullo il peso tendente, e variabile la rigidità: quello vuole la grossezza costante, e questo variabile. Se due corde differentemente grosse saranno della stessa materia, si ritroveranno le rigidità

come

come la base, o grossezza, cioè v come g; ed in virtù della stessa forza minima $dp$ ne risulteranno allungamenti in ragione inversa della grossezza, ch'è quanto dire $dl$ come $\frac{1}{g}$.

Paragonate insieme due corde di grossezza, e di materia differente, e posto che la specie $h$ esprima la rigidità variabile di corde dello stesso diametro, ne proviene la totale rigidità v come $hg$; e $dl$ come $\frac{1}{v}$, come $\frac{1}{hg}$.

La dimostrazione del presente canone riesce semplicissima. Se fosse $dp$ come v, l'allungamento $dl$ si scoprirebbe costante; dunque supponendosi $dp$ costante, il detto allungamento pel il primo canone è come $\frac{1}{v}$, come $\frac{1}{hg}$.

Non si trascuri il corollario, che in riguardo a corde fornite di pura naturale rigidità, l'elemento della varia grossezza serve a determinare la misura di essa rigidità.

Canone VIII.

Se gli unici elementi variabili siano la grossezza, e la rigidità, si avrà $dl$ come $\frac{1}{P+p+v}$: vale a dire le minime distensioni inversamente come l'aggregato del peso stirante $P+p$, e della rigidità v.

Questo canone nascente dalla combinazione del sesto, e del settimo, non è che una replica del canone quinto.

IV. I canoni fra loro diversi sono il primo, che vuole $dl$ come $dp$, il secondo, che vuole $dl$ come $L+l$, il quinto, che vuole $dl$ come $\frac{1}{v+P+p}$. Gli altri tutti si uniformano col quinto, usato al più l'artificio di supporre o la rigidità, o il peso tendente uguale a nulla. Combinati pertanto insieme i tre diversi canoni, si trova essere $dl$ come $\frac{L+l \cdot dp}{v+P+p}$, o sia $b\,dl = \frac{L+l \cdot dp}{v+P+p}$, ch'è quanto dire le minime distensioni in ragione composta; diretta della lunghezza della corda, e della forza minima producente esse distensioni, ed inversa

della

della somma della rigidità naturale delle corde, e del peso tendente.

V. Si vuole osservare che nella stessa corda la rigidità $r$ non è costante; imperciocchè quanto più in vigore dei pesi aggiunti $p$ cresce la lunghezza $L+l$, altrettanto cala la base, a cui è proporzionale la rigidità. Chiamata adunque $h$ la rigidità della corda corrispondente alla lunghezza $L$ ed al peso stirante $P$, avremo generalmente $r = \frac{hL}{L+l}$. La quantità $\frac{L}{L+l}$ è proporzionale alla base variabile della corda, la quale moltiplicata per la lunghezza variabile $L+l$ mi dà il prodotto costante $L$, indice della massa, che nella corda più o meno allungata resta sempre la stessa. L'espressione $r = \frac{hL}{L+l}$ si adatta anche a corde diverse, purchè per $h$ si intenda quella rigidità, che in esse corde corrisponde alla lunghezza $L$, ed al peso tendente $P$ amendue dati. Per computare la specie $h$, bisogna aver riguardo alla rigidità della materia, onde è formata la corda, ed alla base della stessa corda tesa dal peso $P$. Le basi si trovano esattamente col pesare le corde, e collo avvertire che esse basi sono proporzionali ai pesi divisi per le lunghezze moltiplicate nella densità.

Sostituito nella formola superiormente trovata in cambio di $r$ il suo valore $\frac{hL}{L+l}$, essa si presenterà l'equazione differenziale $bdl = \frac{L+l \cdot dp}{\frac{hL}{L+l}+P+p}$, che generalmente esprime la relazione fra gli allungamenti della corda, e le forze o pesi, che li producono.

VI. Si metterà in maggior lume la verità della nostra formola, collo avvertire dedursi da essa il noto canone, che se a due corde della stessa materia, pari in lunghezza, differenti di base, e

tesa

tese da pesi proporzionali alle basi, si applicheran-
no pesi minimi parimente proporzionali alle basi,
genereranno questi distensioni minime uguali.

Sia $L$ la lunghezza della corda corrispondente al peso tendente $P$, ed aggiunto il peso minimo $dp$, si avrà l'espressione $b\,dl = \frac{L\,dp}{h+P}$. Per le cose dette nel canone settimo, la rigidità delle corde della stessa materia, ma di base differente è proporzionale alla base: ma anche il peso $P$ si vuole proporzionale alla base; dunque la somma $h+P$ sta come la base, e supponendosi altresì come la base il peso aggiunto $dp$, e costante la lunghezza $L$; ne segue che relativamente alle corde, di cui parliamo, si troverà costante il prodotto $\frac{L\,dp}{h+P}$, e conseguentemente l'allungamento minimo $dl$ proporzionale ad esso prodotto; il che &c.

Egli è da notarsi per altro che non tutta la materia, che collo stesso nome si chiamano, sono del pari rigide. Tutti gli ottoni per esempio non saranno dotati della stessa rigidità: ed oltre a ciò rendendosi una corda vie più sottile, col seguitare a passar per trafila, la quale sempre più la costipa; paragonate insieme due corde della stessa materia, una sottile, e l'altra grossa, si troverà la prima alquanto più rigida di quello porti la proporzione della base, il che è stato da me confermato colla esperienza. Nella addotta dimostrazione si prescinde da sì fatti elementi.

VII. Col mezzo della formola $b\,dl = \frac{L\,dp}{h+P}$ si troverà il tempo, in cui una corda AB si vibra per lungo. Si tolga al peso tendente $P$ una minima porzione $f$, acciocchè rotto l'equilibrio, la corda si metta in oscillazione. E qui mi dichiaro di supporre, che nello stesso istante si comincino ad accorciare le fibre tutte componenti la corda, e le più vicine, e le più rimote dal peso $P$; il che

si

si verificherà almeno fisicamente, trattandosi di corde, la cui lunghezza sia moderata. Sia (fig. 2.) BF = f la forza minima iniziale, che sollecita al moto il punto estremo B della corda AB, e Bb sia lo spazio, in fine del quale la forza sollecitante è nulla. Eguagliandosi il detto spazio alla somma degli accorciamenti delle fibre tutte, onde è formata la corda AB; egli è facile da capire, che l'area triangolare bBF pareggia la intera azione delle forze sollecitanti. Ora a quest'azione s'eguaglia l'aggregato delle forze vive acquistate e dal peso stirante P, e da tutte le minime particole, che compongono la corda, per ritrovare il quale mi servo del seguente artificio. La lunghezza AB (fig. 4.) della corda rappresenti la sua massa m, ed instituita l'analogia m : P :: AB : BH, una tal linea rappresenterà la massa del peso P tendente la corda. Le due linee bD, bG normali e tra loro, e con la Ab si eguaglino alla velocità massima u del punto B nel sito b, e del peso tendente P, onde sia DG = u², ed agevolmente si scoprirà, che la forza viva del peso P giunto in b è proporzionale al parallelepipedo BK = Pu². In riguardo alla forza viva acquistata dalla corda AB, si compia la piramide ABe, e fatta riflessione, che le velocità massime di due particole bB, cC stanno fra loro come gli spazj percorsi nello stesso tempicello, i quali serbano la ragione delle distanze AB, AC dal punto fisso A; deducasi che se bG esprime la massima velocità della particola bB, la linea cI dinoterà la velocità massima della particola cC, ed il quadrato NI, il quadrato di essa velocità. Quindi i due solidi be, cO esporranno le forze vive delle due fibre bB, cC: ma da tutti i solidi be, cO, &c. dinotanti le forze vive delle corrispondenti particelle viene formata la piramide $ABe = \frac{mu^2}{3}$; dunque la stessa è proporzionale alla somma

Delle

dalle forze vive di tutte le fibre componenti la corda AB.

VIII. Ciò dimostrato, io rifletto che se si desse una corda matematica AB (fig. 2) sollecitata dalla scala di forze bBF, tesa dallo stesso peso P, ed in questo solo differente dalla corda fisica AB, che la sua massa $\frac{m}{3}$ fosse tutta unita nel punto B, acquisterebbe essa la medesima forza viva. Essendo perciò nell'uno e nell'altro caso il punto estremo B delle due corde fisica e matematica dotato in siti analoghi della stessa velocità, e scorrendosi lo stesso spazio Bb; egli è evidente che la corda matematica sarebbe isocrona alla fisica. Trovato pertanto il numero di vibrazioni, che farebbe la corda matematica in un minuto secondo, si caverà la conseguenza che un pari numero di oscillazioni fa nello stesso tempo la corda fisica.

IX. Rivolgendomi alla corda matematica AB, la cui massa uguale alla terza parte di quella, onde è fornita la corda fisica di pari lunghezza $L$, stia tutta concentrata nel punto B; suppongo che il detto punto seguitato dal peso P sia giunto nel sito C, e che indi mova un menomissimo passo Cc. Si tiri l'ordinata $CD = p$, e denominata $bC = l$, sarà l'infinitesima $Cc = -dl$, e per la nota formola si avrà $-pdl = \overline{\frac{m}{3}+P}\cdot udu$; ~~ed integrando~~ ma conforme si è determinato superiormente $b\,dl = \frac{L\,dp}{\overline{h+P}}$; dunque fatta la sostituzione, $\frac{L}{b\cdot\overline{h+P}}\cdot -p\,dp = \overline{\frac{m}{3}+P}\cdot udu$; ed integrando, $f^2 - p^2 = \frac{b\cdot\overline{h+P}\cdot\overline{\frac{1}{3}m+P}\cdot u^2}{L}$. Si aggiunge la costante $f^2$; perchè nel principio del moto, quando la velocità $u = 0$, la forza sollecitante si aguaglia ad $f$ peso minimo detratto dal finito P. E fatta l'estrazione della radice, $\sqrt{f^2-p^2} = \frac{\sqrt{b\cdot\overline{h+P}\cdot\overline{\frac{1}{3}m+P}}}{\sqrt{L}}\cdot u$: ma $u = -\frac{dl}{dt}$, e $dl = \frac{L\,dp}{b\cdot\overline{h+P}}$; dunque $u = \frac{-L\,dp}{b\cdot\overline{h+P}\cdot dt}$; e per conseguenza

conseguenza eseguita la sostituzione, dopo le debite operazioni, $dt = \frac{\sqrt{L\cdot\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b\cdot\overline{h+P}}}\cdot\frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}}$.

L'integrale di $\frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}}$, quando il punto B, compiuta una semivibrazione, sia giunto in b, si eguaglia al quadrante diviso pel raggio, o sia prossimamente alla frazione $\frac{355}{226}$; e perciò integrando, $t = \frac{\sqrt{L\cdot\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b\cdot\overline{h+P}}}\cdot\frac{355}{226}$, ed il tempo di una intera vibrazione del punto B, o sia della corda AB, $t = \frac{\sqrt{L\cdot\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b\cdot\overline{h+P}}}\cdot\frac{355}{113}$. E giacché scopriremo in progresso essere $b = 1$, $t = \frac{\sqrt{L\cdot\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{h+P}}\cdot\frac{355}{113}$; il che ec.

X. Si troverà il valore del tempo $t$ espresso per esempio in secondi, paragonando la corda AB con un pendolo a cicloide, il tempo di una vibrazione del quale generalmente si esprime per la frazione $\frac{355}{113}$ moltiplicata nella radice della lunghezza. Un pendolo lungo once $36\frac{17}{24}$ del piede di Parigi fa una vibrazione per secondo; dunque istituita l'analogia

$$t : \frac{\sqrt{L\cdot\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{h+P}}\cdot\frac{355}{113} :: 1 : \sqrt{36\tfrac{17}{24}}\cdot\frac{355}{113},$$

scopriremo $t = \frac{\sqrt{L\cdot\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{\overline{h+P}\cdot 36\frac{17}{24}}}$, valore del tempo di una vibrazione per luogo della corda matematica isocrona alla fisica AB contrassegnato in secondi.

XI. Egli è noto che oscillando di traverso la corda AB appoggiata a due scannelli, e tesa da una forza equivalente al peso P, e chiamato T il tempo di una sua vibrazione, preso un secondo per unità, si ha l'equazione $T = \frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P\cdot 36\frac{17}{24}}}\cdot\frac{113}{355}$. Osservi chi legge quanto

siano

siano differenti i tempi $t$, $T$ di due oscillazioni della stessa corda, una per lungo, e l'altra per traverso, rispondendosi essi nella proporzione di $\frac{\sqrt{\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{h+P}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{P}} \cdot \frac{113}{355}$, la quale non può essere di egualità, se non nel caso particolare che sia la rigidità $h = \frac{\frac{1}{3}mP+P^2}{m} \cdot \frac{355^2}{113^2} - P$. Nella corda, che si vibra per lungo, si pongono in moto la massa della corda, ed il peso tendente $P$: nella corda, che oscilla di traverso, la sola massa posta in moto si è quella della corda. Trattandosi delle oscillazioni per lungo, va messa in computo la rigidità naturale $h$ della corda, la quale nulla altera le vibrazioni trasversali della corda medesima.

XII. Tra le molte ipotesi, che potrebbero considerarsi, mi ristringerò alle due sole, a cui ci guida la prima supposizione del Conte Jacopo vero Padre, che leggi simili diano norma e alle consuete vibrazioni della corda, che oscillano di traverso a due scannelli appoggiate, e alle vibrazioni della corda, che oscillano per lungo, mentre il peso tendente alternatamente ascende, o discende. Richiedono le due mentovate ipotesi di conseguenza, che le corde siano prive di naturale rigidità, onde si eguagli a nulla la specie $h$, e che il peso stirante $P$ sia minimo relativamente alla massa della corda. Modificata la formola del tempo di una vibrazione per lungo a norma di queste supposizioni, prende il seguente aspetto $t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3}m}}{\sqrt{P}} \cdot \frac{355}{113}$. Fatta la divisione per la quantità costante $\frac{355}{113}\sqrt{\frac{1}{3}}$ si trova $t$ come $\frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P}}$, legge simile a quella, che regola le oscillazioni trasversali della corda.

XIII. Torno a prender per mano l'equazione differenziale del numero V. dopo

$b\,dl = \dfrac{\overline{L+l}\,.\,dp}{\dfrac{hL}{L+l} + \overline{P+p}}$, da cui generalmente si

esprime la relazione fra gli allungamenti delle corde, e le forze o pesi, che li producono: Moltiplico per $\dfrac{hL}{L+l} + \overline{P+p}$, e trasportato un termine da una parte all' altra mutato il segno, trovo $\dfrac{bhL\,dl}{L+l} = \overline{L+l}\,.\,dp - \overline{P+p}\,.\,b\,dl$. Divido tutti i termini per $\overline{L+l}^{\,b+1}$, ed ho

$\dfrac{bhL\,dl}{\overline{L+l}^{\,b+2}} = \dfrac{\overline{L+l}\,.\,dp - \overline{P+p}\,.\,b\,dl}{\overline{L+l}^{\,b+1}}$, ed integrando, non ommessa la aggiunta della costante,

$c - \dfrac{bhL}{\overline{b+1}\,.\,\overline{L+l}^{\,b+1}} = \dfrac{P+p}{\overline{L+l}^{\,b}}$.

Si determina il valore della costante $c$, ponendo il peso aggiunto $p = 0$, nel qual caso è parimente $l = 0$; onde abbiasi

$c = \dfrac{bh}{\overline{b+1}\,.\,L^{b}} + \dfrac{P}{L^{b}}$. Si sostituisca un tale valore, e si troverà $\dfrac{bh}{\overline{b+1}\,.\,L^{b}} + \dfrac{P}{L^{b}} - \dfrac{bhL}{\overline{b+1}\,.\,\overline{L+l}^{\,b+1}}$

$= \dfrac{P+p}{\overline{L+l}^{\,b}}$, o sia moltiplicando per $\overline{L+l}^{\,b}$,

$\overline{\dfrac{bh}{b+1} + P}\,.\,\dfrac{\overline{L+l}^{\,b}}{L^{b}} - \dfrac{bh}{b+1}\,.\,\dfrac{L}{L+l} = P+p$, equazione finita esprimente la relazione fra le distensioni $l$, ed i pesi o forze $p$, dai quali vengono cagionate.

XIV. Ho promesso di provare essere il coefficiente $b = 2$. Otterremo ciò considerando le compressioni dell' aria, la quale conforme metterò in piano lume nello Schediasma II, ha la proprietà, che le sue densità sono proporzionali ai pesi comprimenti. Osservo nell' ultima premessa formola, che posta la rigidità $h = 0$, ne risulta $P\,.\,\dfrac{\overline{L+l}^{\,b}}{L^{b}} = P+p$, espressione da cui

si deduce, che al peso tendente $P+p=0$ corrisponderebbe la lunghezza $L+l=a$ della corda, che non fosse dotata di veruna naturale rigidità.

Passando dalle corde, che si rendono elastiche per via di stiramento, a quelle, che divengono elastiche per via di compressione, si cavi la conseguenza, che levato qualsisia peso comprimente ad una corda, o elastro, la cui rigidità naturale sia nulla, si dilaterà essa infinitamente. Ora ella è tale la proprietà dell'aria, la quale, minorandosi sempre più il peso comprimente, è capace d'una indefinita rarefazione. Rispettivamente adunque all'aria la specie $h$ si eguaglia a nulla almeno fisicamente.

Sia un tubo cilindrico AZ (fig. 5.) ripieno di aria compressa dal peso $P$, e sia la lunghezza AB di esso tubo eguale ad $L$. Al peso $P$ aggiungasi il peso $p$, che generi la compressione $AC=l$, onde la nostra corda si scorti, e si riduca alla lunghezza $BC=L-l$. Il peso comprimente $P+p$ accrescasi di nuovo per una flussione infinitesima $dp$, a cui corrisponda la minima compressione $Cc=dl$, e fatto uso degli stessi canoni come nelle corde solide, che si trovano, col solo divario che sia $h=0$, scopriremo $b\,dl=\frac{L-l\cdot dp}{P+p}$, equazione differenziale esprimente la relazione fra le compressioni dell'aria, ed i pesi, che le producono.

Divido ambo i membri della equazione per $L-l$, ed ho $\frac{b\,dl}{L-l}=\frac{dp}{P+p}$, o pure

$0=\frac{dp}{P+p}-\frac{b\,dl}{L-l}$, ed integrando, presi i logaritmi nella logistica della sottotangente 1, $\log. c=\log.\overline{P+p}+b.\log.\overline{L-l}$, e passando dai logaritmi alle quantità ordinarie, $c=\overline{P+p}\cdot\overline{L-l}^{\,b}$.

Si

Si stabilisca il valore della costante $c$ ponendo $p = 0$, nel qual incontro è parimente $l = 0$; e per conseguenza $c = P.L^b$. Adempiuta la sostituzione nell'ultima sovrapposta formola, troveremo $P.L^b = \overline{P+p}.\overline{L-l}^b$.

Ora essendo, conforme vuol l'esperienza, le densità $d$, $D$ dell'aria come i pesi comprimenti $P$, $P+p$; e deducendosi dalla ritrovata equazione l'analogia:

$$P : P+p :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b};$$ avremo

$$d : D :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b}.$$ Ma le

densità, che generalmente serbano la ragione composta, diretta delle masse, ed inversa dei volumi, nel nostro caso, in cui la massa è sempre costante, sono inversamente come i volumi, ed i volumi dei cilindri $ZA$, $ZC$, che hanno comune la base, sono come le lunghezze $BA = L$, $BC = L-l$; dunque

$$d : D :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}:$$ ma abbiamo altresì scoperto essere

$$d : D :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b};$$ dunque

$$\frac{1}{L} : \frac{1}{L-l} :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b};$$ e però

$\overline{L-l}^{b-1} = L^{b-1}$, il che non può mai verificarsi, se non posto $b = 1$.

Se $b = 1$ nelle compressioni, dee avere lo stesso valore anche negli stiramenti; servendo alli uni, ed agli altri la stessa formola differenziale $b\,dl = \dfrac{\overline{L \mp l}.\,dp}{\frac{hL}{L \mp l} + P+p}$; ed essendo la Natura costante nelle sue leggi. Ciò, come vedremo, viene esattissimamente confermato dalla esperienza.

XV. La formola adunque del numero XIII. cioè

cioè $\overline{\frac{bh}{b+1}+P}\cdot\frac{\overline{L+l}^{\,b}}{L^b} - \frac{bh}{b+1}\cdot\frac{L}{L+l} = P+p$, sostituita in cambio di $b$ l'unità, ci si presenta sotto la forma seguente

$$\overline{\tfrac{1}{2}h+P}\cdot\frac{\overline{L+l}}{L} - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{L}{L+l} = P+p.$$

Nell'asse AD (fig. 6) segno AB = L, ed indi a squadra conduco AK, e BZ = $P+\tfrac{1}{2}h$. Congiunti con una linea, che si prolunghi indefinitamente, i punti A, Z, si segni BH = P, onde resti HZ = $\tfrac{1}{2}h$, e fra gli assintoti AK, AG descrivasi l'iperbola Apolloniana iCHI, la quale passi pel punto H: dico che posta l'assissa AD = L+l, sarà l'ordinata DI = P+p, peso tendente atto a ridurre la corda alla lunghezza AD.

Per la natura dell'iperbola iCHI abbiamo $\frac{ZH\cdot AZ}{AG} = GI$: ma stante la similitudine dei triangoli ABZ, ADG, $\frac{AZ}{AG} = \frac{AB}{AD}$; dunque $\frac{ZH\cdot AB}{AD} = GI$, o sia analiticamente $\frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = GI$, linea esprimente la metà della rigidità naturale della corda, mentre il peso tendente l'ha ridotta alla lunghezza AD = L+l. Ad AD infinita corrisponderebbe GI infinitesima, e minima conseguentemente sarebbe in tale incontro la rigidità della corda divenuta infinitamente sottile. I mentovati triangoli ABZ, ADG ci suggeriscono l'analogia

$$AB : BZ :: AD : DG$$
$$L : P+\tfrac{1}{2}h :: L+l : \frac{\overline{P+\frac{1}{2}h}\cdot\overline{L+l}}{L};$$

da cui si deduce il valore di DG. Essendo per tanto DG = $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}h}\cdot\overline{L+l}}{L}$, GI = $\frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$, ne risulta DI = DG − GI = $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}h}\cdot\overline{L+l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$:

ma

ma per la nostra equazione $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}h}\cdot\overline{L+l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$ $= P+p$; dunque presa $AD = L+l$, sarà la corrispondente ordinata $DI = P+p$, quel che cerca[illegible]

XVI. Alla lunghezza della corda $AB = L$ corrisponde per la costruzione il peso dato $BH = P$, e perciò condotta pel punto $H$ la linea $HM$ parallela ad $AD$, si scoprirà $MI = p$, peso aggiunto, da cui è stata prodotta la distensione $BD$.

Nel punto $C$, in cui si tagliano la linea $AD$, e l'iperbola $iCHI$, il peso tendente si agguaglia a nulla, e per conseguenza $AC$ si è la lunghezza naturale della corda, mentre è nullo il peso tendente. Per ritrovare il valore di $AC = L+l$, si ponga nella nostra formola $P+p = 0$, e fatti i dovuti computi, scopriremo la lunghezza naturale della corda $AC = L+l = L\cdot\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+2P}}$. In questa circostanza $l = BC$ è quantità negativa $= L\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+2P}} - L$, la quale ci manifesta, che levato il peso tendente $BH = P$, la corda si scorta per la porzione $BC$. La linea $CB$ adunque uguale ad $L - \frac{L\sqrt{h}}{\sqrt{h+2P}}$ misura l'allungamento cagionato dal peso $BH = P$. Si troverà il valore di $Ce = \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$, surrogando in vece di $L+l$ la ritrovata sua grandezza $L\cdot\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+2P}}$, onde abbiasi, adempiuti i calcoli necessarj, $Ce = \frac{\sqrt{h^2+2hP}}{2}$, e conseguentemente $2Ce = \sqrt{h^2+2hP}$, rigidità naturale della corda non istirata da peso alcuno.

Posta la lunghezza $AD$ infinita, sarà parimente infinito il peso tendente $DI$ uguale adequatamente a $DG$ ordinata al triangolo $ADG$; giacchè in tale ipotesi è infinitamente picciola l'ordinata $GI$ all'iperbola. Per allungare adunque immensamente una corda, non ci vuol meno di

un

un peso infinito. In fatto per altro questo allungamento indefinito non segue. La tenacità, che connette l'una con l'altra le particole componenti la corda, è finita; e quindi accresciuto il peso tendente sino ad una data misura, la tenacità resta superata dalla forza del peso, e la corda si spezza. Ha sperimentato M. Sauveur, che una corda di acciajo si rompe, quando è stirata da un peso, che sia allo in circa 12000 volte maggiore del peso di [illegible] once del piede di Parigi di detta corda; che per ispezzare una corda di ottone ci vuol un peso 9000 volte più grande del peso di 40 once di essa corda; e per rompere una corda di rame, un peso 5000 volte maggiore del nominato peso di once 40.

XVII. Esaminata quanto basta la premessa costruzione rispettivamente agli allungamenti della corda AC, resta che si dicano alquante parole di quella porzione di curva da C verso A, in cui divenendo negativo il peso tendente, cioè a dire cangiandosi di stirante in premente, ci si presenta agli occhi una legge matematica, ma non fisica di compressioni della corda AC. Per vedere come nelle compressioni si modifichi la formola del numero XV. il peso premente $mi = p$ abbia cagionato nella corda $AB = L$ tesa dal peso $P = Dm$ l'accorciamento $Bd = l$, onde alla corda resti la lunghezza $Ad = L - l$, ed avremo per le equazione al triangolo ADG $dg = \frac{1}{2}h + P . \frac{L-l}{L}$,

e per l'equazione all'iperbola $gi = \frac{\frac{1}{2}hL}{L-l}$,

e conseguentemente, giacchè $di = mi - md = p - P$, $gi - dg = di = p - P = \frac{\frac{1}{2}hL}{L-l} - \frac{1}{2}h - P . \frac{L-l}{L}$.

Questa formola trae l'origine dalla espressione differenziale

differenziale $dl = \dfrac{L-l \cdot dp}{\dfrac{hL}{L-l} + P - p}$, la quale suppone, che la minima compressione $dl$ sia in ragione composta, diretta della forza inassegnabile $dp$, che la produce, e della lunghezza $L-l$ della corda, ed inversa della differenza $\dfrac{hL}{L-l} + P - p$ fra la rigidità naturale $\dfrac{hL}{L-l}$ della corda, ed il peso $p - P = di$, che nella corda AC non isnervata da forza alcuna ha cagionata la compressione Cd. Ora essendo il resto pari, le minime compressioni fisiche stanno in proporzione reciproca della somma, e non della differenza della rigidità, e del peso premente; riuscendo tanto più piccole, quanto è maggiore l'aggregato della rigidità, e del peso che preme.

Se $L$ sarà la lunghezza di un cilindro, ed $h$ la rigidità naturale corrispondente a un dato peso premente $P$, e che in oltre sia $L-l$ la lunghezza, a cui si riduce il cilindro presso dal peso $P+p$, nel quale stato la rigidità naturale si esprime per $\dfrac{hL}{L-l}$, si verificherà la seguente formola differenziale $dl = \dfrac{L-l \cdot dp}{\dfrac{hL}{L-l} + P + p}$, la quale sendo un dato corpo privo di qualunque rigidità naturale, si riduce alla qui sottoscritta $dl = \dfrac{L-l \cdot dp}{P+p}$, ch'è quella stessa da noi ritrovata al numero XIV. relativamente all'aria. La nostra costruzione pertanto non dà la norma alle compressioni fisiche dei corpi.

XVIII. Resta che la legge delle distensioni delle corde contrassegnata dalla equazione $\frac{1}{2}h + P \cdot \dfrac{L+l}{L} - \dfrac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = P + p$ si confermi colla

esperienza.

esperienza. Dalla premessa formola si deduce essere $h = \frac{2pL - 2P\cdot\overline{L+l}}{\overline{2L+l}\,.\,l}$ (1.)

$$L+l = \frac{L}{h+2P}\cdot \overline{P+p} + \sqrt{\overline{P+p}^2 + h^2 + 2hP} \quad (2.)$$

Amendue queste espressioni serviranno a taglio per confrontare colla teorica alcuni esperimenti, che sono per riferire. Furono questi da me fatti con somma diligenza molti anni fa nella occasione di esaminare una legge, che appunto essi esperimenti mi facevo riconoscer per falsa. Raccomandata una corda di ottone al chiodo A (fig. 7.), il quale era distante dallo scannello NO once $32\frac{1}{2}$ del piede di Parigi, equivalenti a linee 390, attaccai primieramente ad essa corda il peso P di libre 2, e segnai con inchiostro il punto B, in cui la corda toccava lo scannello NO. Applicai poscia alla corda il peso P+p eguale a libre 2+4 = 6, ed osservai che il punto B era disceso sotto dello scannello NO linee $1\frac{3}{8}$. Aggiunto poi al peso P = 2 il peso p = 4, onde il peso totale P+p fosse di libre 10, cagionò esso peso aggiunto 8 la distensione di linee $2\frac{3}{4}$, la quale era doppia di quella prodotta dal peso aggiunto 4. Nella equazione segnata (1) si faccia L = 390, P = 2, $l = 1\frac{3}{8}$, p = 4, dati somministratici dalla prima esperienza, e troveremo il valore della rigidità della corda tesa dal peso P = 2, cioè a dire $h = 1134 + \frac{37022}{64761} = 1134 + \frac{7}{13}$.

Dopo ciò nella equazione segnata (2.) si ponga in cambio di h il ritrovato valore, L = 390, P = 2, p = 8 peso aggiunto adoprato nella seconda esperienza, e si scoprirà l'allungamento generato dal peso p = 8, vale a dire $l = 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{207}$. Avendo colla esperienza

ritrovato

ritrovato $l = 2 + \frac{3}{4}$, giudichi il Lettore, se si può sperare maggiore accordo fra il nostro canone, e lo sperimento, consistendo tutto il divario in $\frac{1}{207}$ di linea, minuzia totalmente inosservabile.

XIX. Merita riflessione la rigidità grande delle corde di metallo. La rigidità della nostra corda di ottone equivaleva a libbre $1134 + \frac{7}{13}$. La maniera, con cui si lavorano le corde sonore, aumenta moltissimo la loro rigidità. Diventano esse così sottili, passando innumerabili volte per trafila, che sempre più le costipa, ed irrigidisce.

L'essere la rigidità $h$ assai grande in relazione ai pesi adoprati nelle due sperienze, si è il motivo, per cui le distensioni $1 + \frac{3}{6}$, $2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{207}$ sono adequatamente come i pesi aggiunti 4, 6. Fingasi $h$ infinita, nel qual caso sarà infinitesimo lo allungamento $l$, prodotto dal peso aggiunto $p$, che si suppone finito. Nella equazione (1.) si cancellino tutti i termini relativamente nulli, e resterà $h = \frac{pL}{l}$, e conseguentemente $l = \frac{Lp}{h}$, da cui si deduce, che sendo $\frac{L}{h}$ quantità costante, le distensioni $l$ stanno sempre come i pesi aggiunti $p$. Or ecco la ragione, per cui essendo la rigidità $h$ assai grande in riguardo ai pesi usati nelle sperienze, si sieno trovati gli allungamenti nella stessa adequata proporzione dei pesi aggiunti.

XX. Dalla osservazione, colla quale finisce il numero XVI. si raccoglie che in una corda sono due cose diverse la rigidità che ripugna alle distensioni, e la tenacità che ne impedisce il rompimento sino ad un

certo

certo segno. Once $32\frac{1}{2}$ della corda usata nelle due descritte sperienze pesavano grani $7\frac{1}{2}$, dei quali 576 compongono un'oncia. Facciasi $32\frac{1}{2} : 40 :: 7\frac{1}{2} : \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}$, ed il quarto termine dell'analogia dinoterà il peso di once 40. della nostra corda. Conforme la regola determinata per le corde di ottava da M. Sauveur, nel citato numero da me riferita, moltiplicando il suddetto peso per 9000, il prodotto che ne risulta di grani $83076\frac{12}{13}$ = ad once 144 + grani $132\frac{12}{13}$ = a libre 12 + grani $132\frac{12}{13}$ si eguaglia al peso, che romperebbe la corda, la cui tenacità per conseguenza è minore del peso di libre 12 e grani $132\frac{12}{13}$. Questo peso attaccato alla corda produrrebbe lo allungamento $l$ = linee $3\frac{1}{2}$ un po scarse, al quale corrisponderebbe la rigidità naturale $\frac{hL}{L+l}$ = a libre $1124\frac{1}{2}$ a un di presso, grandezza incomparabilmente maggiore della tenacità della corda alquanto più piccola del peso di libre 12 e grani $132\frac{12}{13}$.

Schediasma II.

Composto l'anno 1805

## Schediasma II.

### Della proporzione fra le compressioni delle corde rasee, e le forze che le producono.

I. Nel precedente Schediasma ho detto delle compressioni dell'aria soltanto ciò, che cadeva a proposito. Ora questa materia si vuol trattare direttamente. Il tubo cilindrico AF (Fig: 5.) sia ripieno di un fluido compresso dal peso P, e la sua lunghezza AB si esprima per L. Al peso dato P aggiungasi il variabile p, che cagioni la compressione AC = l, e riduca la lunghezza della corda fluida alla misura BC = L−l. Si aumenti nuovamente il peso P+p per la flussione dp, a cui si riferisca la menoma compressione Cc = dl, e chiamata v la rigidità naturale del nostro fluido, col mezzo dei canoni stabiliti nel mentovato Schediasma relativamente alle corde solide, che si dicendono, troveremo $bdl = \frac{L-l \cdot dp}{v+P+p}$ (1).

Nelle corde solide il valore della rigidità v non è costante, ma va scemando, secondo che calas la loro base. Non così succede nella nostra corda fluida, la cui rigidità v si conserva invariabile, supponendosi eguali tutte le sezioni AH, CD.

II. Cerco le proprietà di un fluido, in cui se non altro nelle menome compressioni la densità cresce nella ragione dei pesi comprimenti. Conciossiachè le densità della stessa quantità di materia si corrispondono nella proporzione inversa dei volumi, e questi nel nostro caso sono come BC = L−l : Bc = L−l−dl, ci si presenterà l'analogia

$P+p : P+p+dp :: \frac{1}{L-l} : \frac{1}{L-l-dl}$, e conseguentemente l'equazione $\overline{P+p} \cdot \overline{L-l} = \overline{P+p+dp} \cdot \overline{L-l-dl}$,

che

che si riduce così $\overline{P-p}\cdot dl = \overline{L-l}\cdot dp$. Nella formola (1) in vece di $\overline{L-l}\cdot dp$ sostituisco lo scoperto valore, onde ne risulta $b\,dl = \frac{\overline{P+p}\cdot dl}{v+P+p}$, ovvero $b = \frac{P+p}{v+P+p}$. Osservo primieramente, che dovendo esser costante il coefficiente $b$, non può ciò effettuarsi se non nella circostanza, in cui $v=0$, e $b = \frac{P+p}{P+p} = 1$. Quindi se almeno nelle minime compressioni le densità hanno da riferirsi nella ragione dei pesi comprimenti; deve il coefficiente $b$ agguagliarsi all'unità, ed il fluido esser privo di rigidità naturale. Si incontra la medesima conseguenza deducendo dalla equazione $b = \frac{P+p}{v+P+p}$ la grandezza di $v = \frac{\overline{1-b}\cdot\overline{P+p}}{b}$. Dinotando la lettera $v$ la rigidità naturale, di cui il fluido è fornito prima di esser compresso, il suo valore non dee dipendere dal peso premente $P+p$; e per salvare questa indipendenza, non v'è altro ripiego fuorché porre come sopra $b=1$, ed $v=0$.

III. Ripiglio per mano la formola (1)

$b\,dl = \frac{\overline{L-l}\cdot dp}{v+P+p}$, o dividendo per $L-l$,

$\frac{b\,dl}{L-l} = \frac{dp}{v+P+p}$, e passando all'integrazione

Avrò $b\cdot\log\frac{L}{L-l} + A = \log\overline{v+P+p}$. Si determina la costante $A$ riflettendo, che quando $p=0$, è parimente $l=0$, e perciò $A = \log\overline{v+P} - b\log 1$. e mettendo $\log 1 = 0$, $A = \log\overline{v+P}$. Avremo pertanto $b\cdot\log\frac{L}{L-l} = \log\frac{v+P+p}{v+P}$, e fatto il passaggio dai logaritmi ai numeri,

$\frac{L^b}{\overline{L-l}^b} = \frac{v+P+p}{v+P}$ (2), equazione ad una delle infinite iperbole fra gli asintoti, *

* che esprime la relazione fra le compressioni $l$ di qualsivoglia fluido, e le forze $p$ dalle quali sono prodotte.

IV. Noto che la supposizione $b=1$, $v=0$

ci dà

si dà $\frac{L}{L-1} = \frac{P+p}{P}$; ed indi per analogia:

$P : P+p :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L-1}$; ma le quantità $\frac{1}{L}, \frac{1}{L-1}$ stanno come le densità del fluido compresso dai pesi $P$, $P+p$; dunque mettendo $b=1$, $v=0$, le densità del fluido accettano la proporzione dei pesi comprimenti non solo nelle compressioni minime, ma ancora nelle finite, nè si può dare fluido dotato di questa proprietà soltanto nelle infinitesime compressioni.

V Tra gli assintoti $BG$, $BH$ (Fig. 8) si descriva la iperbola $IDL$ adattata all'equazione (m) $\frac{L^b}{\overline{L-1}^b} = \frac{v+P+p}{v+P}$, in cui alla ascissa $BA = L$ corrisponda la ordinata $AD = v+P$. Tagliata $AK = v$, per i punti $D$, $K$ si conducano le linee parallele a $BH$, la ultima delle quali intersecherà la iperbola nel punto $L$, e determinerà la ordinata $HL = v$. Per comprimere più la colonna fluida $BA = L$, e ridurla alla altezza $BC = L-1$, egli è d'uopo al peso $KD = NM = P$ aggiungere $MI = p$, onde ne risulti la ordinata $CI = v+P+p$. Che se si potesse di ridurre la colonna $BA$ ad un'altezza infinitesima $BC$, si richiederebbe l'accrescimento di un infinito peso $MI = p$. Scemando il peso $KD$ per la minima $mi$, la corda fluida $BA = L$ si dilaterà sino alla altezza $Bc = L+l$, e giungerà finalmente alla sua naturale lunghezza $BH = L+l = \frac{L\cdot\overline{v+P}^{\frac{1}{b}}}{v^{\frac{1}{b}}}$, quando essendo il peso levato $OL = KD = P$, non sia più compressa da peso alcuno. La naturale lunghezza $BH$ si scoprirà infinita in un fluido, che sia privo di rigidità, di modo che

$HL$

$HL = x$ si eguagli a nulla, o almeno ad una minima quantità.

VI. Ci insegnano le osservazioni, che quanto l'aria è meno compressa, tanto più si dilata, nè di questa sua rarefazione l'ultimo confine si è potuto mai discoprire. Si estragga pur a piacere l'aria dalla macchina del Boyle, che la restante occuperà sempre tutto il recipiente, nè mai accaderà che la parte inferiore dello stesso sia piena d'aria, e vuota la parte superiore. Egli è dunque manifesto, che in questo fluido o non vi è rigidità, ovvero essa dee riputarsi talmente minima (dentro certi confini), che possa presentemente trascurarsi con sicurezza, onde la resistenza al costipamento unicamente meccanicamente dipenda dalla forza che preme. Quindi relativamente all'aria si adempierà la formola

$$\frac{L^b}{\overline{L-l}^{\,b}} = \frac{P+p}{P}, \text{ o sia } \frac{L}{L-l} = \overline{\frac{P+p}{P}}^{\,\frac{1}{b}},$$

e le densità $\frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$ staranno come i pesi comprimenti $P$ e $P+p$ alzati alla dignità del cui esponente $\frac{1}{b}$.

VII. Ora egli è di uopo determinare il valore di $b$. Nello antecedente Schediasma ho ~~fatto~~ avvertito, che se $b$ pareggia l'unità in riguardo alle corde d'aria, dee conservare la stessa grandezza anche rispettivamente alle corde solide. In fatti vi siano due corde, una liquida, e l'altra solida, egualmente lunghe, del pari rigide naturalmente, prema quella, e tirata questa dal medesimo peso $P$, e servendo ad entrambe la comune formola differenziale $b\,dl = \frac{L\,dp}{r+P}$, non si può assegnare ragione alcuna, per cui la forza minima $dp$ non abbia da cagionare in amendue la stessa compressione, o allungamento $dl$. Il perchè

in

in ambo i casi deve assegnarsi a $b$ un pari valore, onde si conservi l'equazione $bdl = \frac{Ldp}{P+p}$.
Gli esperimenti frattanto ci hanno mostrato, che nelle corde solide è $b=2$; dunque tale è la sua grandezza anche nelle corde d'aria, le compressioni della quale relative ai pesi comprimenti sono per conseguenza espresse dalla formola $\frac{L}{L-l} = \frac{P+p}{P}$, la quale ci manifesta, che le densità $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L-l}$ abbracciano la proporzione dei pesi comprimenti $P$, $P+p$, e che la curva $I\mathfrak{D}L$ è una iperbola Apolloniana.

VIII. Il caldo accresce l'elasticità dell'aria, il freddo la diminuisce. Acquisti l'aria maggior calore, e si muterà la proporzione fra la densità $\frac{1}{L}$ ed il peso comprimente; laonde acciocchè la colonna $BA$ mantenga la pristina densità, si richiederà il peso più grande $A2\mathfrak{D}$. Descritta degli stessi assintoti $BG$, $BH$ l'iperbola Apolloniana $2I2\mathfrak{D}2L$, che passi pel punto $2\mathfrak{D}$, determinerà essa la proporzione fra le lunghezze $BA$, $BC$ della corda aerea, ed i pesi comprimenti $A2\mathfrak{D}$, $C2I$. Conciossiachè $\frac{BA}{BC} = \frac{CI}{A\mathfrak{D}} = \frac{C2I}{A2\mathfrak{D}}$, avremo $A\mathfrak{D} = P : A2\mathfrak{D} :: CI = P+p : C2I$, e quindi posta $A2\mathfrak{D} = nP$, sarà $C2I = nP+np$, ed all'iperbola $2I2\mathfrak{D}2L$ competerà l'equazione $\frac{L}{L-l} = \frac{nP+np}{nP}$.

IX. Affine di mettere la stabilita teorica alla prova del cimento della sperienza, prendo in prestanza

dall'

dall' accuratissimo Boile alcuni esperimenti. L'aria da prima nel tubo riempiva uno spazio alto 12. dita Anglicane, e poscia col mezzo del mercurio si comprimeva, sicchè occupasse altezze sempre minori. Nella seguente tavola la prima colonna indica le altezze dell' aria nel tubo, e la seconda le altezze del mercurio comprimente, l'une e l'altre espresse in dita Anglicane. Si avverta per altro, che al peso del mercurio si dee ~~aggiungere~~ accoppiare quello dell' atmosfera, che parimente l'aria comprima, e che mentre il Boile faceva gli esperimenti, equivaleva a dita 29.$\frac{1}{8}$ di mercurio. Alle due mentovate aggiungo le colonne terza e quarta contenenti, quella le differenze fra le altezze dell' aria, e questa le differenze fra le altezze del mercurio secondo l'esperienza, e secondo la teorica.

# Schediasma II.

| | Altezza dell'aria. | Altezza del mercurio. | Differenza fra le altezze dell'aria secondo l'esperienza, e secondo la teorica. | Differenze fra le altezze del mercurio secondo l'esperienza, e secondo la teorica. |
|---|---|---|---|---|
| | 12 | 0 | [illegible] | |
| 1. | 11 $\frac{1}{2}$ | 1 $\frac{7}{16}$ | $\frac{63}{978} = \frac{2}{31}$ | $\frac{63}{368} = \frac{2\frac{17}{23}}{16}$ |
| 2. | 11 | 2 $\frac{15}{16}$ | $\frac{58}{918} = \frac{1}{16}$ | $\frac{14}{48} = \frac{4\frac{2}{3}}{16}$ |
| 3. | 10 $\frac{1}{2}$ | 4 $\frac{6}{16}$ | $\frac{9}{134} = \frac{1}{15}$ | $\frac{3}{14} = \frac{3\frac{3}{7}}{16}$ |
| 4. | 10 | 6 $\frac{3}{16}$ | $\frac{58}{565}$ $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{48} = \frac{5\frac{3}{5}}{16}$ |
| 5. | 9 $\frac{1}{2}$ | 7 $\frac{14}{16}$ | [illegible] $= \frac{2}{37}$ | $\frac{61}{304} = \frac{3\frac{4}{19}}{16}$ |
| 6 | 9 | 10 $\frac{2}{16}$ | $\frac{21}{313} = \frac{1}{15}$ | $\frac{5}{12} = \frac{6\frac{2}{3}}{16}$ |
| 7. | 8 $\frac{1}{2}$ | 12 $\frac{8}{16}$ | $\frac{23}{222} = \frac{1}{10}$ | $\frac{69}{136} = \frac{8\frac{2}{17}}{16}$ |
| 8. | 8 | 15 $\frac{1}{16}$ | $\frac{64}{707} = \frac{1}{11}$ | $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$ |
| 9. | 7 $\frac{1}{2}$ | 17 $\frac{15}{16}$ | $\frac{111}{1566} = \frac{2}{27}$ | $\frac{37}{80} = \frac{7\frac{2}{5}}{16}$ |
| 10 | 7 | 21 $\frac{3}{16}$ | $\frac{43}{805}$ $\frac{1}{19}$ | $\frac{43}{112} = \frac{6\frac{1}{7}}{16}$ |
| 11. | 6 $\frac{1}{2}$ | 25 $\frac{3}{16}$ | $\frac{113}{1738} = \frac{1}{15}$ | $\frac{113}{208} = \frac{8\frac{9}{13}}{16}$ |
| 12. | 6 | 29 $\frac{11}{16}$ | $\frac{54}{941} = \frac{1}{17}$ | $\frac{9}{16}$ |
| 13. | 5 $\frac{3}{4}$ | 32 $\frac{3}{16}$ | $\frac{195}{3924} = \frac{1}{20}$ | $\frac{195}{368} = \frac{8\frac{11}{23}}{16}$ |
| 14. | 5 $\frac{1}{2}$ | 34 $\frac{15}{16}$ | $\frac{91}{2050} = \frac{1}{23}$ | $\frac{91}{176} = \frac{8\frac{3}{11}}{16}$ |
| 15. | 5 $\frac{1}{4}$ | 37 $\frac{15}{16}$ | $\frac{165}{4292} = \frac{1}{26}$ | $\frac{55}{112} = \frac{7\frac{6}{7}}{16}$ |
| 16. | 5 | 41 $\frac{9}{16}$ | $\frac{63}{1131} = \frac{1}{18}$ | $\frac{63}{80} = \frac{12\frac{3}{5}}{16}$ |
| 17 | 4 $\frac{3}{4}$ | 45 | $\frac{83}{2372} = \frac{1}{29}$ | $\frac{83}{152} = \frac{8\frac{14}{19}}{16}$ |
| 18. | 4 $\frac{1}{2}$ | 48 $\frac{12}{16}$ | $\frac{15}{1246} = \frac{1}{83}$ | $\frac{10}{48} = \frac{3\frac{1}{3}}{16}$ |
| 19. | 4 $\frac{1}{4}$ | 53 $\frac{11}{16}$ | $\frac{157}{5300} = \frac{1}{34}$ | $\frac{157}{272} = \frac{9\frac{4}{17}}{16}$ |
| 20. | 4 | 58 $\frac{12}{16}$ | $\frac{32}{1406} = \frac{1}{44}$ | $\frac{8}{16}$ |
| 21. | 3 $\frac{3}{4}$ | 63 $\frac{15}{16}$ | $-\frac{33}{5956} = -\frac{1}{180}$ | $-\frac{11}{80} = \frac{-2\frac{1}{5}}{16}$ |
| 22. | 3 $\frac{1}{2}$ | 71 $\frac{5}{16}$ | $\frac{65}{3214} = \frac{1}{49}$ | $\frac{65}{112} = \frac{9\frac{2}{7}}{16}$ |
| 23. | 3 $\frac{1}{4}$ | 78 $\frac{11}{16}$ | $\frac{57}{6900} = \frac{1}{126}$ | $\frac{57}{208}$ $\frac{4\frac{5}{13}}{16}$ |
| 24. | 3 | 88 $\frac{7}{16}$ | $\frac{31}{1481} = \frac{1}{37}$ | $\frac{17}{16}$ |

## Schediasma II.

X. La molta irregolarità, colla quale procedono le due serie delle differenze fra le altezze dell'aria e del mercurio secondo l'esperienze, e secondo la teoria, apertamente dimostra che le osservazioni, comecchè diligenti, ci dànno il prossimo e non l'esatto. Nulladimeno a chiara luce comprendesi, che corretti gli errori, anderebbero divenendo sempre più piccoli i termini della prima progressione, e sempre più grandi quelli della seconda. Se non vi fosse veruna resistenza, i pesi espressi nella colonna quarta avrebbero cagionato compressioni eguali alle grandezze contenute nella colonna terza, ed esercitato quell'azione, che dalle aumentate resistenze è stata impedita. Si rifletta pertanto, che coll'aria sono miste molte particole eterogenee poco o nulla costipabili, e che per conseguenza dallo stesso peso l'aria pura stata più della impura compressa. Infatti leggesi nel Tomo II. dei Commentarj dell'Accademia di Bologna aver la celebre Signora Laura Bassi coll'esperienza trovato, che l'umidità dell'aria ne diminuisca le compressioni. Aggiungasi che acquistando il volume delle particole eterogenee tanto maggior proporzione a quello dell'aria pura, quanto essa è più costipata, ~~perciò alle compressioni~~ accrescimenti di si richiedevano, pesi via più grandi ad ottenere quelle compressioni, che conforme la teoria, levati gli accrescimenti, seguirebbero nell'aria ~~pura~~ senza la mistione delle particole eterogenee.

XI. Oltre a ciò non dobbiamo porre in non cale i fregamenti dell'aria, e del mercurio contro l'interna superficie del tubo. La frizione patita dall'aria più o meno compressa la possiamo considerare come costante; imperciocchè stando essa in ragione composta della pressione, e della superficie del tubo occupata dall'aria, e questa come l'altezza, e l'altezza come il volume aereo, ed il volume inversamente

samente come la densità, e la densità direttamente come la pressione a un di presso; ne segue che la fregazione suddetta è in proporzione composta diretta, ed inversa della pressione, e però costante. Altrettanto non può affermarsi del fregamento del mercurio sofferto, il quale conforme a che se ne infonda nel tubo una maggior quantità, si aumenta al crescere del rincalzo delle pressioni, e della superficie fregata.

XII. Divenendo adunque più grandi le resistenze, secondochè l'aria più si costipa, hanno esse da far equilibrio con una quantità maggiore di peso, e da impedire la compressione, che da esso peso verrebbe prodotta, come realmente succede. E qui egli è di uopo riflettere, che quando si affermano la densità dell'aria proporzionali ai pesi comprimenti, si parla dell'aria pura, e dalle resistenze prescindesi. Ho fatto vedere che nell'aria mista colle particole eterogenee, computate le resistenze, deggiono apparire le densità alquanto più piccole dei pesi comprimenti: e tali scoprendole gli esperimenti confermano essi la già dimostrata teoria, la quale verrebbe convinta di falsità, se nell'aria impura frastornata dalle resistenze le altezze della colonna di aria si fossero puntualmente trovate in ragione reciproca dei pesi, che la costipano.

XIII. Non dissimulo una forte obbiezione, ed è, che in due giorni susseguenti ha la lodata Signora Laura Bassi osservato ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ essere sufficiente una colonna di mercurio un dito ~~[illegible]~~ minore dell'altezza del barometro notata con sommo studio, per istringere l'aria nella metà dello spazio. In questi due casi non giova, né pregiudica la considerazione delle resistenze,

rimosse

rimossa la quale, avrebbe bastato un peso ancora più piccolo, che dalla legge prescritta si sarebbe vie più allontanato. Quantunque molte cagioni possano aver prodotto il mentovato effetto, nulladimeno valendomi del principio stabilito dal C. Jacopo Riccati nell'ultimo Capitolo del Libro III. dei Principj e dei Metodi della Fisica, cioè che se contro una teorica ben avverata si mette in campo qualche eccezione, o difficoltà, di cui non si veda chiara la soluzione, non si può condannare [illegible] di qualche semplice ipotesi, la quale metta in calma la fantasia, e si adoperi un modo, onde si dilegui la proposta difficoltà; dico che non conservandosi sempre costante la proporzione fra la densità dell'aria, ed il peso comprimente, ma ricevendo variazione dal caldo, e dal freddo, l'effetto, di cui si parla, può aver tratta da questo fonte l'origine. Al peso AaD (fig. 80) corrisponda la corda di aria BA; e se non si mutasse il calore dell'aria stessa, per costiparla sino in C, si renderebbe necessario il peso CaD. Si raffreddi l'aria nel tempo, in cui si fa l'osservazione, e si adempierà la medesima compressione AC col peso C9 minore di CaD.

XIV. Affine di maggiormente confermare la mia teorica, noto che avendo fo dimostrato al numero VI. doversi nell'aria priva di vapori(?) rigidità verificare la formola $\frac{L^b}{(L-1)^b} = \frac{P+p}{P}$, si deduce da questa il valore di $b = \frac{\log\left(\frac{P+p}{P}\right)}{\log\left(\frac{L}{L-1}\right)}$, il quale ha da esser costante. Ricorro nuovamente agli esperimenti del Boile, e per non moltiplicare soverchiamente i calcoli, scelgo il primo,

il primo, il duodecimo, ed il ventiquattresimo, a cui i valori di $b$.

Sia come nella prima sperienza $L=12$, $L-l=11\frac{1}{2}$, $P=29\frac{1}{8}$, $P+p=29\frac{1}{8}+1+\frac{2}{101}=30\frac{9}{101}$, e troveremo

$$b=\frac{\log\left(\frac{30\frac{9}{101}}{29\frac{1}{8}}\right)}{\log\left(\frac{12}{11\frac{1}{2}}\right)}=\frac{\log\left(\frac{449}{4601}\right)}{\log\left(\frac{24}{23}\right)}=\frac{209230}{184834}$$

$$=1+\frac{24396}{184834}=1+\frac{2}{15}\ \text{in circa.}$$

Nella sperienza duodecima abbiamo $L-l=6$, $P+p=58\frac{13}{101}$, e questi dati accoppiati colle quantità invariabili $L=12$, $P=29\frac{1}{8}$ ci daranno da determinare

$$b=\frac{\log\left(\frac{58\frac{13}{101}}{29\frac{1}{8}}\right)}{\log.2}=\frac{\log\left(\frac{941}{4601}\right)}{\log.2}$$

$$=\frac{3052033}{3010300}=1+\frac{41733}{3010300}=1+\frac{1}{72}.$$

L'ultima sperienza ci insegna essere $L-l=3$, $P+p=117\frac{9}{101}$, e quindi scopriremo

$$b=\frac{\log\left(\frac{117\frac{9}{101}}{29\frac{1}{8}}\right)}{\log.4}=\frac{\log\left(\frac{1461}{468}\right)}{\log.4}=\frac{6060029}{6020600}$$

$$=1+\frac{39429}{6020600}=1+\frac{1}{153}.$$

La varietà dei valori di $b$, che esser dovrebbe costante, si fa toccare con mano, da che gli esperimenti vengono tratti. Da ele= che gli esperimenti vengono tratti, e dai mezzi accessorj, che in essi si insinuano, tolti di mezzo i quali, si troverebbe esattamente $b=1$, conforme richiede la legge delle densità proporzionali ai pesi comprimenti. Posto $b<1$, le densità sarebbero proporzionatamente maggiori dei pesi comprimenti; ed il contrario succederebbe, ammessa l'ipotesi di $b>1$. Ora invece le esperienze del Boyle ci danno $b>1$, inquanto che restando in parte impedita dalle resistenze la compressione, le densità crescono a pro-

porzione

porzioni più piccole dei pesi comprimenti.

XV. Riservo all'ultimo luogo l'argomento più convincente. Quando si propaga il suono, le fibre di pari lunghezza componenti una corda, o raggio sonoro cominciano le loro vibrazioni una dopo l'altra per eguali intervalli di tempo le loro vibrazioni unisone a quelle del corpo, che suona, e che per conseguenza si effettuano colle leggi di un pendolo a cicloide. Dal principiarsi successivamente il moto ne segue, che le dette fibre si comprimono, che si accresca la loro elasticità, e che dalla differenza delle elasticità di due fibre vicine divisa per la massa della fibra meno compressa viene determinata la forza acceleratrice della stessa fibra, la qual forza ha da essere proporzionale alla distanza dal punto medio della vibrazione, se si avrà poi oscillare colle leggi di un pendolo cicloidale.

Sia $dx$ la lunghezza di una fibra, mentre sta in equilibrio col peso dell'atmosfera, e $dx-dy$ una lunghezza della medesima fibra compressa, ove la quantità relativamente massima di $y$. Se si principio si assuma, che le forze elastiche stanno nella ragione inversa delle lunghezze, cioè si dirà come $\frac{1}{dx} : \frac{1}{dx-dy}$, le forze acceleratrici si troveranno proporzionali alle distanze dal punto medio della oscillazione, come vedremo nella Dissertazione I. dello Schediasma VIII. e dovrà però in se stesso avere il moto vibratorio colle leggi di un pendolo a cicloide. Ora essendo anche le densità in ragione reciproca delle lunghezze $dx$, $dx-dy$, ed eguagliandosi le forze elastiche alle forze comprimenti, colle quali si equilibrano, dall'ammesso principio ne nasce, che le densità delle fibre aeree si corrispondano nella proporzione delle forze comprimenti.

Ciò

## Schadiasma II.

Ciò posto adunque, ne risultano le forze accele=
ratrici come le distanze dal punto di mezzo della
vibrazione, e l'aria può oscillare non altrimenti
che un pendolo a cicloide: ma l'aria in fatti
si vibra con questa legge; dunque tornando
indietro per le stesse vestigia; troveremo
che, nelle medesime compressioni, le densità dell'aria hanno da stare come
le forze comprimenti. E giacchè ho provato
al num. IV. che se nelle compressioni infinitesime
le densità stanno come i pesi comprimenti, accet=
tano la stessa proporzione anche nelle compressioni
finite; chiaramente si scopre, che questa
proprietà compete all'aria nelle compressioni
dell'uno, e dell'altro genere. Quindi usiamo
non si può dubitare, che al vibrarsi di un corpo
sonoro l'aria non oscilli con legge simile,
inoltre ce ne porta il suono all'orecchio; così
è del pari certo, che le densità dell'aria segui=
ranno la proporzione delle forze, che la compri=
mono.

XVI. Ho asserito soltanto che le densità dell'
aria si ristringono nella ragione delle forze
comprimenti, quando le compressioni stanno
dentro i limiti delle infinitesime, e del finito,
perchè sono persuaso che questo canone non
possa aver luogo nelle dilatazioni, e nelle
compressioni infinite, alle quali dovrebbe cor-
rispondere la lunghezza della colonna aerea
o immensa, o eguale a nulla.

Quantunque cogli esperimenti non si
abbia mai potuto trovare l'ultimo confine
delle dilatazioni dell'aria, nulladimeno dob=
biamo crederle grandissime sì, ma finite.
Quindi fa di uopo assegnare alla rigidità na=
turale un valore finitamente minimo, e non
già uguale a nulla. Finchè la forza premente
da una maniera si rovescia alla rigidità natu=
rale, sì poco questa resistenza, e la densità
abbracciano due casi comprimenti la propor=
zione. Che se questi pesi sono talmente dimi=
nuiti

Schediasma II.

menti; che non sia più lecito trascurare la rigidità, allora si muta legge, e vale la formola

$$\frac{L}{L-l} = \frac{V+P+p}{V+P}.$$

Se l'aria fosse formata di punti, conforme l'idea matematica del Cav. Newton, che si respingessero con forze in ragione inversa delle distanze, la sua densità conserverebbe sempre la proporzione dei pesi comprimenti benché all'infinito aumentati. Ma conciossiaché le particelle elementari aeree per altro inconveniente non possano riguardarsi dal punto, non può continuare ad osservarsi il canone stabilito qualora sia la lunghezza BC (fig. 5) della colonna di aria ~~[illegible]~~ si trovi talmente piccola, che per giungere ad una così grande costipazione, fosse necessario che le particelle aeree si compenetrassero l'una coll'altra.

## Schediasma III.

Dalla proporzione fra le forze applicate a squadra alla metà delle corde tese, ed i varj effetti da esse forze cagionati. Colla stessa occasione si ragiona della proporzione che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte.

1. Qualora alla metà di una corda tesa, e a due scannelli appoggiata si applica a squadra una forza, ripiega essa la detta corda per un determinato spazio, o saetta; ne allunga egualmente le due metà; ed accresce del pari la loro tensione. Dei mentovati tre effetti, e colla stessa occasione anche della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte, terrò discorso nel presente Schediasma. Il Conte Jacopo Riccati mio Padre trattando prima di ogni altro questa materia in una sua Dissertazione inserita nel Tomo I. de' Supplementi al Giornale d'Italia, e ristampata nel Tomo III. delle sue Opere, suppone primieramente che la forza $DH = f$ (fig. 9.) dell'obbietto esterno agisca tutta raccolta nel punto medio $C$ della fibra $AB = a$, dimodochè essa fibra in virtù dell'azione della forza $DH$ prenda la figura triangolare $ADB$. Suppone in secondo luogo, che continuata la linea $BD$ verso $I$, e condotta $HI$ parallela ad $AD$, onde la forza $DH$ si risolva nelle due $HI$, $DI$, e delineata col raggio $BC$ la porzione di circolo $Ce$, la distensione $eD = l$ sia cagionata dalla forza $DI$; il che, come vedremo, succederebbe soltanto, se si uguagliasse a nulla la forza $p$ tendente la fibra nella sua naturale positura $ACB$.

ACB. Suppone finalmente in terzo luogo, che gli allungamenti CD = l serbino sempre la ragione delle potenze DI. Ora giacché mi è riuscito nello Schediasma I. di scoprire le vere relazioni fra le distensioni CD = l, e le forze che direttamente le generano; ho presa risoluzione di maneggiare la cosa con maggiore generalità, non ritenendo salvo che la prima fra le tre supposizioni del Co. Jacopo mio Padre.

Trovare la proporzione fra le saette, e le forze applicate a squadra alla metà delle corde tese appoggiate a due scannelli, e raccomandate a due chiodi immobili.

11. Al punto di mezzo C della corda AB = 2L raccomandata a due chiodi immobili A, B, e tesa da una forza equivalente al peso dato P si applichi con direzione normale ad AB la forza DH = f, la quale produca la saetta CD = s; e si cerca la relazione fra la forza f, e la saetta s. Rifletto che la semicorda AD = BC + CD = L+l è tesa nella positura ADB da una forza, o peso DI = P+p maggiore di quella uguale a P, che la stirava nella situazione ACB, per la quantità accresciuta p, da cui, e non da DI = P+p (eccettuato il caso di P = 0) è stato prodotto l'allungamento CD, conforme a ciò che ho spiegato nel citato Schediasma I. Chiamo h la rigidità naturale della corda nel sito ACB, ed il mentovato Schediasma mi insegna essere $\frac{1}{2}h + P \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = P+p$ (1). Tirata la linea IG parallela ad AB, la similitudine dei triangoli ADC, IDG suggerisce le analogie

$$DG : DI :: DC : AD$$
$$\tfrac{1}{2}f : P+p :: s : L+l$$

Da

da cui deducasi l'equazione $\frac{\overline{P+p}\cdot s}{L+l} = \frac{1}{2} f$ (2.).
Finalmente il triangolo rettangolo BCD ci somministra la formola $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2}$

$$L+l = \sqrt{L^2+s^2} \quad (3.)$$

Nella equazione (2.) in cambio di $P+p$ si sostituisca il suo valore preso dalla equazione (1.), e si avrà, adempiuti i necessarj calcoli $\frac{\overline{h+2P}\cdot s}{L} - \frac{hLs}{\overline{L+l}^2} = f$. In vece di $L+l$ pongasi il suo valore contenuto nella equazione (3.), e si scoprirà

$$\frac{\overline{h+2P}\cdot s}{L} - \frac{hLs}{L^2+s^2} = \frac{2Ps}{L} + \frac{hs^3}{L^3+Ls^2} = f \quad (4.)$$

formola, ch'esprime la relazione cercata fra le saette s, e le forze f che le producono.

III. Per maggiormente confermare la verità della nostra formola, poniamola al cimento della esperienza. Da essa formola si deduce quest'altra $h = \frac{L^3 f + Lfs^2 - 2PL^2 s - 2Ps^3}{s^3}$ (5.). Ora perchè qualunque benchè menomo sbaglio, che si commetta nel misurare la saetta s, porta grandissimo divario nel valore della naturale rigidità h della corda ACB tesa dalla forza equivalente al peso P; fa di uopo rettificare il valore della saetta s prodotta dalla forza f, paragonando insieme i suoni delle due semicorde CB, DB. Il suono o numero n di vibrazioni, che fa la corda CB per esempio in un secondo, si eguaglia all'unità divisa pel tempo t durata di una di esse vibrazioni espresso in parti di secondo; onde abbiasi l'equazione $n = \frac{1}{t}$: ma nelle corde fisiche di massa m, che si vibrano di traverso, $t = \frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P \cdot 36\frac{17}{24}}} \cdot \frac{113}{355}$, dinotando la quantità $36\frac{17}{24}$ la lunghezza di un pendolo a secondi, e $\frac{113}{355}$ la proporzione del diametro al circolo;

Dunque

Dunque $n = \frac{\sqrt{P} \cdot 30\frac{12}{24}}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{355}{113}$. Ed avvegnachè rispettivamente a qualunque corda le grandezze $30\frac{12}{24}$, $\frac{355}{113}$ sono sempre costanti, ne segue che generalmente è il suono $n$ come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{2m}}$. Se il peso o forza tendente $P$ si mantiene costante, e la massa $m$ della corda sia come la lunghezza $L$, ciò che interviene in corde, le quali non differiscono salvo che nella lunghezza; allora si trova $n$ come $\frac{1}{L}$, o sia il suono in ragione inversa della lunghezza della corda. Se la massa $m$ non si diversifica, ciò che succede nelle semicorde $CA$, $DB$, in tal caso si scopre $n$ come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}}$, cioè in ragione composta, diretta dimezzata della forza tendente $P$, ed inversa parimente dimezzata della lunghezza $L$. Ho notate queste due circostanze, perchè verranno a taglio nelle nostre sperienze.

IV. Si determinerà la proporzione fra i suoni $n$, $N$ delle corde $CA$, $DB$ col seguente metodo. Si prenda una corda $acb$ (fig. 10) unisona alla $ACB$, si sottoponga ad essa uno scannello di tal sito tale, che le corde $db$, $DB$ si corrispondano all'unisono, e ne seguirà che i suoni $n$, $N$ staranno fra loro in ragione inversa di $cb$ a $db$, onde si verifichi l'analogia $n : N :: db : cb$.

La dimostrazione è semplicissima. I suoni delle due corde $cb$, $db$ tese dallo stesso peso, e che non differiscono salvo che in lunghezza, serbano la ragione inversa delle lunghezze $cb$, $db$, ch'è quanto dire si corrispondono nella proporzione $db : cb$: ma le corde $cb$, $db$ sono unisone alle corrispondenti $CA$, $DB$; dunque i suoni $n$, $N$ di queste ultime stanno come $db : cb$, il che &c.

V.

V. Insegnata la maniera di scoprire la proporzione fra i suoni $n$, $N$, mi rivolgo ad indagare qualmente per le spezie $n$, $N$, e per le altre quantità date si possa esprimere il valore della saetta $CD = s'$. Essendo pari la massa delle corde $CB$, $DB$, le lunghezze come $L : L+l$, i pesi tendenti come $P : P+p$, averemo per le cose dette nel numero III $n : N :: \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}} : \frac{\sqrt{P+p}}{\sqrt{L+l}}$, o sia $n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{P+p}{L+l}$ : ma conforme ho fatto vedere al numero II. $\frac{P+p}{L+l} = \frac{1}{2}\frac{f}{s}$; dunque sostituito questo valore in cambio di $\frac{P+p}{L+l}$ nella soprapposta analogia, si avrà $n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{1}{2}\frac{f}{s}$, e conseguentemente l'equazione $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = s$ (6).

VI. Al punto medio $C$ della corda di ottone $AB$ situata orizzontalmente, la cui semilunghezza $CB = 30$ mezz' once, e la forza tendente $P$ equivalente ad once $140$, attaccai il peso o forza $DH = f = 4$, la quale produsse la saetta $CD = s$, che con diligente misura trovai uguale a $\frac{3}{7}$. I suoni $n$, $N$ delle semicorde $CB$, $DB$, usato il metodo esposto al numero IV, gli ritrovai corrispondersi nella ragione $119 : 120$. Quindi si verificava essere $n^2 : N^2 :: \overline{119}^2 : \overline{120}^2$, o sia prossimamente $118 : 120 :: 59 : 60$, e passando alla equazione, $\frac{n^2}{N^2} = \frac{59}{60}$. Sostituiti nella formola del numero precedente $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = s$ in vece di $\frac{n^2}{N^2}$, di $f$, di $L$, e di $P$ i valori somministratici dalla esperienza, averemo

$$s' = \frac{59}{60} \cdot \frac{4 \cdot 30}{2 \cdot 140} = \frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}.$$

La frazione $\frac{1}{140}$, per cui la saetta rettificata differisce da quella, che si è scoperta colla misura, sfugge la più scrupolosa diligenza di chi esperimenta, consistendo

in

in $\frac{1}{24}$ di linea. Fatto uso del valore purificato della saetta $CD = s = \frac{159}{140}$ nella formola (5.), si troverà dopo i necessarj computi
$h$ = ad once 24054 = a libre 2004 $\frac{1}{2}$, valore della rigidità naturale della corda ACB corrispondente al peso o forza tendente $P$ = ad once 140.

VII. Applicai al punto medio C della corda ACB la forza $f = 15\frac{3}{5} = \frac{78}{5}$, la quale cagionò la saetta $CD = s$, che accuratamente misurata si trovò eguale a $\frac{7}{5}$. I suoni $n$, $N$ delle due semicorde CB, DB serbavano la proporzione 11 : 12. Se col mezzo della relazione dei suoni cercheremo il valore della saetta, scopriremo $CD = s = \frac{1573}{1120} = \frac{7}{5} + \frac{1}{224}$. La differenza $\frac{1}{224}$ si sottrae all'attenzione de' più circospetti osservatori. Sostituiscasi nella formola (5.) in cambio di $h$ il suo valore determinato nel numero superiore, ed in vece di $L$, $f$, $P$ le grandezze 30, $\frac{78}{5}$, 140 giusta la presente sperienza, e poste in opera le regole per isciogliere le equazioni cubiche, ci si presenterà $s = \frac{211}{150} = \frac{7}{5} + \frac{1}{150}$. La $150^{ma}$ parte di mezz'oncia consiste in $\frac{1}{25}$ di linea; divario totalmente inosservabile. Molto minore si è la differenza fra i due valori $\frac{211}{150} = \frac{7}{5} + \frac{1}{150}$, $\frac{1573}{1120} = \frac{7}{5} + \frac{1}{224}$, il primo somministratoci dalla nostra equazione, ed il secondo ricavato dalla proporzione fra i suoni delle due semicorde CB, DB.

Chi volesse schivare l'imbroglio di disciferare la sovrapposta equazione (5.) cubica, tenga un metodo inverso, e supposta $s = \frac{211}{150}$, cerchi il valore della rigidità $h$, che troverà eguale ad once 24013, e pochissimo differente dall'altro determinato nel numero precedente uguale ad once 24054. La ragione di questa diversità dipende da qualche piccola inadequazione

usata

usata nello stabilire la grandezza della saetta $s = \frac{211}{150}$.

VIII. Quanto inosservabile è la differenza fra la saetta scoperta colla misura, e quella che abbiamo ricavata dalla nostra equazione; altrettanto riesca menomissima la alterazione, che la saetta $s = \frac{211}{150}$ introduce nella proporzione dei suoni $n : N$, che si è rinvenuta come $11 : 12$. Giacchè nel numero V. abbiamo dimostrato essere $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = s$; avremo per conseguenza $\frac{n^2}{N^2} = \frac{2Ps}{fL}$, e fatti $P = 140$, $s = \frac{211}{150}$, $f = \frac{78}{5}$, $L = 30$, si troverà $\frac{n^2}{N^2} = \frac{1477}{1755}$. La differenza fra le ragioni $\frac{1477}{1755}$, $\frac{121}{144}$ somministrateci, quella dalla nostra formola, e questa dalla osservazione, consiste nella frazione $\frac{212688}{212355}$, che prossimamente equivale alla seguente $\frac{639}{638}$. Se dunque fra le proporzioni dei quadrati dei suoni $n^2$, $N^2$ o ricavate dalla formola, o scoperte colla esperienza c'è il divario $\frac{639}{638}$; fra le ragioni dei suoni $n$, $N$ passerà la differenza $\frac{638\frac{1}{2}}{638} = \frac{1277}{1276}$, la quale adempiuti i dovuti calcoli, si troverà equivalere alla decimasesta parte di un Comma $\frac{81}{80}$; minuzia, di cui l'orecchio non se ne accorge.

IX. Si conchiuda che l'esperienza conferma la verità della mia teorica, andando essa di accordo con quella maggiore fisica adequazione, che in così fatte indagazioni può mai sperarsi. Avverto per altro che se alla metà della corda AB si applicassero forze notabilmente maggiori delli adoprate nello esperimento secondo, ne risulterebbero saette alquanto più piccole di quelle richiede il mio canone; perchè in esso si è trascurata la resistenza, che patisce la corda ripiegandosi nei siti A, D, B.

X. Affine di internarmi più a fondo nel magistero della Natura, la quale ha collocato

la

la fibra rimanendo che ricevano di traverso le impressioni degli obbietti esterni, darò prima la costruzione della formola (4.)

$$\frac{2P+h}{L}s - \frac{hLs}{L^2+s^2} = \frac{2Ps}{L} + \frac{hs^3}{L^3+Ls^2} = f,$$

e fatte le dovute considerazioni sopra la relazione fra le saette $s$, e le forze $f$ che le producono, indagherò quali conseguenze derivino dalla varia modificazione delle costanti $P$, $h$, $L$, che contrassegnano la tensione, la rigidità, e la lunghezza della fibra $AB$, mentre si trova in linea retta. Mi rivolgerò poscia ad esaminare con simile metodo la proporzione fra le forze $f$, e le ~~……~~ aumentazioni $l$ di lunghezza, e $p$ di tensione da esse forze cagionate nella fibra $AB$.

XI. Segnata a squadra (Fig. 11.) le linee $CZ = L$, $ZK = 2P - h$, per gli punti $C$, $K$ tiro la linea $CK$, che continuo indefinitamente, ed a questa faccio perpendicolare $KT$, che taglia la linea $CZ$ prodotta nel punto $T$. Col vertice $C$, parametro $CT$, e colla condizione che le coordinate formino l'angolo $CKZ$, descrivo la parabola Apolloniana $CQV$. Segno arbitrariamente l'assissa $CG$, e condotta l'ordinata $GQ$, che si continui sino in $D$, da linea $CB = L$ parallela a $DG$, e congiungo con una linea i due punti $B$, $Q$. Si tagli $ZA = 2P$, onde resti $AK = h$, e si tiri $AX$ normale a $KT$. Determinata $CR = KX$, e descritta $RZ$ parallela a $BQ$, facciasi $GH = CZ$, ed il punto $H$ apparterrà alla curva $CHR$, che si vuol descrivere, la cui assissa $CD = s$, e la ordinata $DH = f$. Dal punto $B$ si meni $BP$ parallela a $CK$, e si continui $DG$ sinchè in $P$.

Per la proprietà della parabola $CQV$ si verifica l'equazione $\frac{\overline{CG}^2}{CT} = GQ$. La

similianza

simiglianza dei triangoli CDG, CFK, CKT mi somministra le analogie CD : CF :: CG : CK, CD : CK :: CG : CT. Dalla prima ricavo essere CD : CK :: $\overline{CD}^2 : CF.CG$, e quindi la seconda prende il seguente aspetto $\overline{CD}^2 : CF.CG :: CG : CT$, e si dà l'equazione $\frac{\overline{CD}^2}{CF} = \frac{\overline{CG}^2}{CT}$. Avremo dunque $GQ = \frac{\overline{CD}^2}{CF} = \frac{s^2}{L}$. Aggiunta $GP = L$, si forma $PQ = L + \frac{s^2}{L} = \frac{L^2+s^2}{L}$. I triangoli simili QPB, KCZ suggeriscono l'analogia $PQ : PB = CG :: KC = KX : CZ$, da cui deducesi l'equazione $CZ = \frac{CG.KX}{PQ}$; ma stante la similitudine dei triangoli CDG, KXA abbiamo $CD : CG :: KX : AK$, e conseguentemente $CG.KX = CD.AK$; dunque $CZ = HG = \frac{CD.AK}{PQ}$, e sia analiticamente $CZ = HG = \frac{hLs}{L^2+s^2}$. Finalmente l'analogia, che ci viene additata dai triangoli simili CDG, CFK, cioè a dire

$CF : FK :: CD : DG$

$L : \overline{nP+h} :: s : \frac{\overline{nP+h}.s}{L}$ determina

il valore di $DG = \frac{\overline{nP+h}.s}{L}$. Avremo pertanto $DH = DG - HG = \frac{\overline{nP+h}.s}{L} - \frac{hLs}{L^2+s^2}$: ma $\frac{\overline{nP+h}.s}{L} - \frac{hLs}{L^2+s^2} = f$; dunque posta $CD = s$, sarà la corrispondente ordinata $DH = f$, il che &c.

XII. La nostra curva è fornita di un altro ramo simile al CHQ, nel quale tanto le saette s, quanto le forze f sono negative. Questo ramo serve per le saette Cd (Fig. 9.) della corda AB.

La linea $HG = \frac{hLs}{L^2+s^2}$ (Fig. 11.) ha un massimo valore $KQ = \frac{1}{2}h$ corrispondente a $CD = s = CF = L$. In tale incontro la linea BQ tocca la parabola CQV nel punto V, e l'angolo CBQ, ed altresì l'uguale CKZ ascende al

massimo

massimo è, e massima conseguentemente diviene la grandezza di $CZ = HG$.

Conciossiachè $DH = f = \frac{2P+h}{L} \cdot s - \frac{hLs}{L^2+s^2}$ $= \frac{2Ps}{L} + \frac{hs^3}{L^3+Ls^2}$, e $DY = \frac{2Ps}{L}$, formola nascente dalla analogia

$$CZ : CD :: ZA : DY$$
$$L : s :: 2P : \frac{2Ps}{L},$$

ne risulta $YH = \frac{hs^3}{L^3+Ls^2}$, valore della intercetta fra la inclinata CA, e la curva CHe.

Quando le saette $s$ sono minime, la intercetta $YH = \frac{hs^3}{L^3+Ls^2}$ scopresi infinitesima del terzo grado, ed incomparabile con $DY = \frac{2Ps}{L}$ infinitesima del primo grado. Cancellato adunque il termine rispettivamente nullo, vi si presenta $DH = DY = f = \frac{2Ps}{L}$, ed in questo caso le saette sono come le forze, verificandosi la proporzione $L : 2P :: s : f$. Non trascuro di osservare che la linea CA tocca la curva CHe nel punto C.

Se le saette divenissero infinite, ipotesi per altro che non è fisica, trascurato il termine infinitamente piccolo $\frac{hLs}{L^2+s^2} = HG$, si troverebbe $DH = DG = \frac{2P+h}{L} \cdot s = f$, espressione da cui dedurrebbesi la analogia $L : 2P+h :: s : f$, la quale ci insegnerebbe che anche in tal circostanza le saette serberebbero la ragione delle forze. Egli è facile da scoprire che la linea CK serve di assintoto alla curva CHeh, la quale giace tutta dentro l'angolo KCA.

XIII. Nei casi intermedj, mentre cioè le saette sono finite, mano crescono o scemano

le

le saette di quelle crescano o scemino le forze, che le producono; dovendosi per gradi passare dalla ragione $L : 2P$ alla più rimota $L : 2P + h$.

Per dimostrar ciò rigorosamente, sia $CD = s$, e conseguentemente $DH = f = \frac{2Ps}{L} + \frac{hs^3}{L^3 + Ls^2}$. Si segni $Cd = ns$, vale a dire in qualunque proporzione con $CD$, e si avrà $dh = z = \frac{2Pns}{L} + \frac{hn^3s^3}{L^3 + Ln^2s^2}$. Se le forze serbassero la ragione delle saette, dovrebbe essere $nf = \frac{2Pns}{L} + \frac{hns^3}{L^3 + Ls^2} = z = \frac{2Pns}{L} + \frac{hn^3s^3}{L^3 + Ln^2s^2}$. Ora io dico che posto $n > 1$, e per conseguenza $ns > s$, è parimente $z > nf$, e posto $ns < s$, è parimente $z < nf$; laonde meno crescono o scemano le saette di quello crescano o scemino le forze, che le producono.

Comincio dal provare che ad $n > 1$ corrisponde $z = \frac{2Pns}{L} + \frac{hn^3s^3}{L^3 + Ln^2s^2} > nf = \frac{2Pns}{L} + \frac{hns^3}{L^3 + Ls^2}$. Se così è, tolto di mezzo il termine comune $\frac{2Pns}{L}$, resterà $\frac{hn^3s^3}{L^3 + Ln^2s^2} > \frac{hns^3}{L^3 + Ls^2}$, e dividendo per $\frac{hns^3}{L}$, $\frac{n^2}{L^2 + n^2s^2} > \frac{1}{L^2 + s^2}$. Moltiplico ambo i membri per $L^2 + n^2s^2 . L^2 + s^2$, e mi si presenta $n^2L^2 + n^2s^2 > L^2 + n^2s^2$, e sottratta la quantità comune $n^2s^2$, $n^2L^2 > L^2$, o sia $n > 1$, conseguenza vera, e conforme alla ipotesi stabilita.

Se si supporrà $n < 1$, ne seguirà essere $n^2L^2 < L^2$, ed indi tornando indietro per la strada or ora calcata, si scoprirà $z = \frac{2Pns}{L} + \frac{hn^3s^3}{L^3 + Ln^2s^2} < nf = \frac{2Pns}{L} + \frac{hns^3}{L^3 + Ls^2}$.

XIV. Egli è parimente manifesto che, stando dentro i limiti della quantità finita, meno crescono o scemano le saette, di quello crescano

o scemino le forze, che la producono: verità, che ottimamente si accorda colla esperienza. In fatti ci insegna l'esperimento sopra riferito al numero VI., che applicata al punto medio di una corda, la cui semilunghezza $\frac{1}{2}L = 30$, la forza $f = 4$, produsse questa una saetta, che con diligente misura si trovò eguale a $\frac{3}{7}$. Col mezzo della proporzione fra i suoni della corda, mentre dimora in linea retta, e mentre sta in equilibrio colla forza $f$., la stessa saetta si scoprì eguale a $\frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$, e questo valore si è stabilito fisicamente giusto. Se la saetta crescessero in proporzione delle forze, si determinerebbe la saetta $S$ generata dalla forza $F = \frac{74}{5}$ colla seguente analogia

$$4 : \frac{59}{140} :: \frac{74}{5} : S = \frac{2301}{1400} = \frac{4 + \frac{61}{240}}{5}.$$

Ricorrendo all'esperimento descritto al numero VII, osserviamo, che la forza $\frac{74}{5}$ cagionò una saetta, che o sia eguale a $\frac{7}{5}$, come si rinvenne colla misura, o a $\frac{7}{5} + \frac{1}{224}$, come si ritrovò col mezzo della proporzione dei suoni, è sempre notabilmente minore di $\frac{4 + \frac{61}{240}}{5}$. Con ragione adunque ho poco fa asserito uniformarsi colla esperienza la legge, che non passando oltre i termini delle grandezze finite, meno crescono o scemano le saette, di quello crescano o scemino le forze, onde vengono generate.

XV. Mi inoltro alle conseguenze, perchè, e noto che mentre le forze sono minime anche fisicamente, producono saette a se stesse proporzionali, e mantenendosi, come vedremo, adequatamente costante la naturale tensione della fibra, fa questa le sue vibrazioni più e meno estese nel tempo stesso, le quali risvegliano nell'anima sensazioni più o meno forti, ma tutte aggradevoli.

aggradevoli. Che se la forza si aumenta soverchiamente, allora la fibra troppo si stira, e corre rischio di patir danno. Ad un tale inconveniente mette in parte riparo la legge, che quando le forze non sono minime, più crescano le forze delle saette. La forza $f$ genera la saetta $s$. Sia $rs$ quella saetta, che comincia a danneggiar l'organo, e conforme che si vuole una forza maggiore di $rf$ per produrre la saetta $rs$, ne segue che la forza $rf$ si deve contare nel numero di quelle, che non molestano la fibra.

XVI. Considero presentemente le alterazioni, che cagiona nelle saette $s$ la varia grandezza della rigidità $h$. Questa nuovamente per mano la formola $\frac{2Ps}{L} + \frac{hs^3}{L^3+Ls^2} = f$, rifletta che posta la saetta $s$ infinitesima, e stando la rigidità $h$ dentro i termini del finito, la linea $yH = \frac{hs^3}{L^3+Ls^2}$ è incomparabile colla linea $DY = \frac{2Ps}{L}$. Quindi in tale ipotesi, qualunque sia il valore finito della rigidità $h$, la forza $f = DH = DY$ produrrà sempre la saetta costante $s =$ [illegible]

Si fingano infinite le saette $s$, ed allora si troverà $DH = DG$ e $f = \frac{2P+h}{L}s$, formola, da cui si ricava che nella detta circostanza più cresca o cala la rigidità $h$, di quello che al contrario calino o crescano le saette $s$ generate dalla forza invariabile $f$. Ciò molto maggiormente si verifica qualora si tratti di saette finite.

Che se queste si assumano minime fisicamente, quali sono rispettivamente alla lunghezza delle fibre le saette in esse operate dalle forze non nocive degli oggetti esterni; si deduce la conseguenza, che per diversificare notabilmente le saette prodotte da una forza data, bisogna che le rigidità stiano fra loro in una proporzione

molto

molto lontana. L'esperienza ci insegna che le sensazioni d'un uomo adulto sono più vive di quelle d'un vecchio, e meno vive di quelle d'un giovane. Si inferisca adunque che gran diversità ci ha da essere fra le rigidità delle fibre di un adulto, di un vecchio, e di un giovane, e si ammiri l'artifizio dell'Autore della Natura, che ciò non ostante le sensazioni per una parte non isvaniscano, e per l'altra non divengan moleste. Merita di essere distintamente avvertita la bellissima proprietà, che i disequiti dell'organo superano di gran lunga quei delle sensazioni.

XVII. Sia s la minima saetta, sino cui faccia di uopo incurvare una fibra di data massa, tensione, e lunghezza, perchè vibrandosi risvegli nell'anima una distinta sensazione. La forza f operi questa saetta nella fibra di un uomo adulto, la cui rigidità h. Per produrre la stessa saetta nella fibra di un uomo vecchio fornita di maggiore rigidità H, ci vorrà una forza più grande F. Quindi la forza primiera f genererà nella fibra del vecchio una saetta minore di s, a cui non corrisponderà sensazione distinta. In fatti osserviamo che per farci intender dai vecchi, bisogna alzare la voce, e che a qual lume fioco, a cui legge un adulto, non legge un vecchio. Per la stessa ragione un lume ancora più fioco basterà ad un giovane, e non ad un uomo adulto.

Ma questo vantaggio che le fibre di un giovane siano più pieghevoli di quelle d'un adulto, viene compensato dal maggior pericolo, che dalla troppa azione delle forze essendo restino danneggiate. Suppongasi S la massima saetta, che non porta pregiudizio

a

a una fibra. Venga questa prodotta dalla forza f nella fibra di un adulto, la cui rigidità h. Egli è chiaro che la stessa forza innocente in riguardo all'adulto, recherà nocumento alla fibra più molle dell'uomo giovane, cagionando in essa una stretta maggiore di s, che si suppone la massima fra quelle, che all'organo non son nocive. Hanno sperimentato in Bologna, che l'impito della materia elettrica, che per lo più non apporta danno agli uomini di età consistente, riesce ai giovanetti sommamente pregiudiziale.

Le fibre degli uomini sani ed adulti sono nello ottimo stato di perfezione. Le ha il Sapientissimo Iddio dotate di quella rigidità conveniente, onde faccia in loro una impressione sensibile, ma non nociva la forza ordinaria di quegli oggetti esterni, con cui siamo in commercio, e dei quali importa alla nostra conservazione, ed al nostro ben essere, che ci accorgiamo. Prima di giungere alla virilità, le fibre non sono ancora quanto basta robuste, per resistere a certe forze più rigorose. Quando poi ci incamminiamo dalla virilità alla vecchiaja, il mondo sensibile (per valermi di una espressione, con cui dà fine il Co. Jacopo mio Padre alla citata dissertazione) si va per noi successivamente, ed insensibilmente perdendo.

XVIII. Agli ammalati danno fastidio quegli oggetti, che in tempo di sanità riuscivano loro gratissimi. Nelle stanze degli infermi bisogna chiudere le finestre, parlar sottovoce; perchè la forza anche moderata della luce, e del suono gli offende. Questi effetti io credo che poco o nulla dipendendo dalla rigidità, che nella fibra degli uomini infermi si scemi;

traggano

traggano principalmente l'origine dal movimento della forza de' muscoli, che pongono in tensione la fibra, la quale forza da me si esprime per la lettera $P$. Mi accingo adunque a far vedere a chi legge, quanto influisca nelle sensazioni l'alterazione di un sì fatto elemento.

XIX. Supposta nulla la forza $P$, che stira la fibra, mentre si trova in linea retta, svanisce nella fig. 11. la linea $DA = nP$, e la linea $CA$ cade sopra la $CD$: laonde in tale ipotesi avremo $YH = f = \frac{hs^3}{L^3 + Ls^2}$, e mentre $s$ sia minima rispettivamente ad $L$, $YH = f = \frac{hs^3}{L^3}$, conforme ha ritrovato mio Padre nel suo Schediasma [illegible]

Due conseguenze si possono dedurre dalla premessa formola: e primieramente per cagionare eguali saette in fibre di pari lunghezza, ci vorrebbero forze proporzionali alle rigidità. Che se la forza esteriore fosse costante, le saette starebbero inversamente come le radici cubiche delle rigidità. Quindi si scopre quanto giovi alla buona economia delle sensazioni, che le fibre sien poste in tensione, avendo non ha molto osservato, che la diversa misura della rigidità altera pochissimo le piccole saette, che dalle fibre tese nell'oscillare si scorrono.

Serbando le forze la ragione dei cubi delle saette, non si compierebbero in pari tempo le vibrazioni più o meno dilatate della stessa fibra, imperciocchè richiede necessariamente l'isocronismo, che le forze sieno come le saette, o come gli spazj da passarsi.

Finalmente le fibre non istirate riuscireb-

bero

bero inettissima per oscillare; perchè ciascuna vibrazione c'impiegherebbero un tempo infinito. Fingasi tutta raccolta nel punto D (fig. m.) la massa della corda ADB, il che non turba le essenziali delle deduzioni. La scala delle forze sollecitanti riferite alle saette, o sia agli spazj da percorrersi sarebbe la parabola cubica CnN corrispondente all'equazione $\frac{L^3 f}{h} = s^3$, le cui ordinate DN, dn esprimono la forza, e le ascisse DC, dC le saette. Sanno i Geometri che la forza viva acquistata dalla corda AB, quando è ritornata nella postura ACB, si agguaglia all'area CDNnC, la quale è proporzionale a $DC^4$, ch'è quanto a dire ad una flussione infinitesima del quarto grado. Essendo finita la massa della corda concentrata in D, ne segue che il quadrato della velocità nel sito C dee ascriversi al quarto ordine delle quantità minime, e che per conseguenza la detta velocità spetta al secondo grado degli infinitamente piccoli. Ora con una velocità, che al più giunge ad essere infinitesima dell'ordine secondo, non si può passare lo spazio DC minimo del primo grado, salvo che in tempo infinito. Se alle saette infinitesime si sostituiranno le fisicamente minime, agevolmente ci accorgeremo, che rimossa dalla linea retta ACB una fibra priva di tensione, si fermerebbe senza restituirsi nella situazione ADB.

XX. Abbandonata un'ipotesi non accettata dalla Natura, consideriamo variabile sì, ma sempre finita la forza tendente P. Se le saette sieno minime, la formola $\frac{aPs}{L} = f$ ci insegna, che prese come costanti la forza estrinseca f, e la lunghezza L della fibra, le saette s stanno reciprocamente come le forze

tendenti

tendenti P.

Supponendosi infinita la saetta, si verifica l'equazione $\frac{2P + h \cdot s}{L} = f$; da cui possiamo ricavare, che essendo date le quantità $h$, $f$, $L$, le saette si abbracciano la ragione inversa della somma della doppia forza tendente $P$, e della rigidità $h$. In tale circostanza manco crescano o calano le saette, di quello che al contrario calino o crescano le forze tendenti.

Le saette frattanto, per cui si ripiegano le fibre, si accostano molto più al minimo, che all'infinito; e perciò quasi con la stessa proporzione, onde si minorano, o s'aumentano le tensioni, tutto a rovescio si aumentano, o si minorano le saette. Quindi fondatamente ho asserito al numero XVIII. che qual fastidio, che recano agli ammalati certi oggetti loro aggradevoli in tempo di sanità, dipende principalmente dallo sminuimento della forza tendente.

Se la tensione si ingrandisse smoderatamente (messo da parte il danno, che potrebbe patirvi la fibra) la impressione della forza $f$ scemarebbe talmente, che o pochissime o nulle si risveglierebbero le sensazioni nell'anima.

Non tralascio di avvertire, che se alquanto meno crescono o calano le saette, di quello che al contrario calano o crescono le tensioni, egli è tutto frutto della rigidità delle fibre, tolta di mezzo la quale, svanirebbe nella equazione $\frac{2Ps}{L} + \frac{hs^3}{L^3 + Ls^2} = f$ il termine $\frac{hs^3}{L^3 + Ls^2}$, e quelle saette seguirebbero esattamente la proporzione reciproca delle forze tendenti.

XXI. I tempi delle vibrazioni di due

corde

corde ugualmente lunghe, e di pari massa stanno inversamente come le radici delle forze tendenti. Per la qual cosa se decrescerà notabilmente la tensione delle fibre, oscilleranno queste più lentamente. Da un tale principio penso che proceda quella languidezza, che si osserva negli occhi de' moribondi.

XXII. Se le fibre sian simili, tese da forze proporzionali alle loro basi, composte di materia egualmente rigida, e fornite di massa proporzionale a quella degli organi, a cui deggiono partecipare il moto; lo elemento della varia lunghezza nulla influisca nella vivacità delle sensazioni. Le masse delle nostre fibre si corrispondono nella proporzione dei cubi delle lunghezze, le superficie, e le basi nella proporzion dei quadrati. E conciossiachè le tensioni $P$, e le rigidità $h$ stanno come le basi, ne segue che da loro la ragione dei quadrati $L^2$ delle lunghezze viene abbracciata. Nella stessa proporzione si riferiscono parimente le forze esterne, conciossiachè a misura delle superficie ricevono le fibre la impressione degli oggetti, conforme riflette il Co. Jacopo mio Padre al numero VI. della mentovata Dissertazione.

Ciò premesso io dico, che le saette serbano la ragione delle lunghezze. In grazia della semplicità mi servo di una dimostrazione indiretta. Sia dunque $s = nL$, cioè le saette come le lunghezze, e sostituito questo valore nella formola $\frac{2Ps}{L} + \frac{hs^3}{L^3+Ls^2} = f$, troveremo

$$2nP + \frac{n^3}{1+n^2} \cdot h = f$$

: ma i coefficienti $2n$, $\frac{n^3}{1+n^2}$ sono quantità costanti, e tanto le tensioni $P$, quanto le rigidità $h$ stanno come $L^2$; dunque $f$ come $L^2$: conseguenza, che va d'accordo col

vero

nervo.

Si potrebbe agevolmente provare, che i tempi delle vibrazioni delle nostre fibre, anche per fette che non sian minime, accettano la ragione delle lunghezze d'essa fibra, e si caverebbe poscia la conseguenza, che essendo i tempi proporzionali agli spazj che si scorrono, e crescendo o calando la velocità con pari legge, si trovano queste uguali in siti analoghi, di modochè le forze vive delle fibre seguitano la proporzione delle loro masse. Ora dovendosi comunicare il moto ad organi, la cui massa è proporzionale a quella delle fibre, acquisteranno essi pari velocità, alle quali corrisponderanno sensazioni egualmente spiritose.

XXIII. Se le stabilite misure delle forze tiranti, e delle rigidità si suppongano variate, vagliono le stesse conseguenze per me dedotte, mentre ho trattato delle fibre di eguale massa e lunghezza, ma diversamente rigide, e diversamente tese. Fatta la riflessione che la materia componente le fibre dei fanciulli è più molle di quella, onde constano le fibre degli adulti, si conchiuderà che le sensazioni dei primi sono più vive di quelle dei secondi.

XXIV. Ne risulterebbero sensazioni diversamente vivaci, quando le masse delle fibre simili, rigide, e tese proporzionatamente, non si corrispondessero, come le masse degli organi, a cui dee passare il tremito. Le fibre di maggiore, o di minore massa relativa sve=gliarebbero più o meno brillanti le sensazioni.

XXV. Resta ch'io dica qualche cosa delle fibre dissimili. Consistendo la dissomiglianza nelle basi o troppo grandi o troppo piccole,

le quali

le quali hanno parte nella determinazione della rigidità, egli è facile lo sensitiva la proporzione della forza estrinseca, e delle saette. Bisognerebbe poscia computare le forze vive guadagnate dalle fibre, e paragonarle colla massa degli organi, ai quali debbono partecipare il moto, per dedurre la relazione fra l'energia delle sensazioni. Frattanto mi contenterò di notare col Co. Jacopo mio Padre, che in quella guisa che negli uomini di rado si trovano due volti affatto simili; si deve credere che per lo più le loro fibre siano di struttura differente, e che ognuno abbia, al pari della fisonomia, le sue particolari sensazioni.

XXVI. Esaminata quanto basta la proporzione fra le forze $f$, e le saette $s$, metto al paragone colle medesime forze le distensioni $l$, ch'esse producono nelle fibre, e ne deduco poscia alquante importanti conseguenze.

Determinare la relazione tra
la forza applicata a squadra
al punto medio di una fibra,
e le distensioni, ch'essa nella
detta fibra cagiona.

Ricavo la formola (4.) abbiamo $\frac{2ls}{L} + \frac{hs^3}{L^3+Ll^2} = f$; ma per la (3.) $L+l = \sqrt{L^2+s^2}$, o sia $2Ll + l^2 = s^2$; dunque sostituito in cambio di $s$ il suo valore, ne risulta

$$\frac{2l}{L}\sqrt{2Ll+l^2} + \frac{h\,(2Ll+l^2)^{\frac{3}{2}}}{L\,(L+l)^2} = f \quad (7.),$$

equazione, che determina la proporzione cercata fra gli allungamenti $l$, e le forze $f$, dalle quali sono prodotti.

Ripetuta la curva CHQ (Fig. 13.), le cui coordinate $CD = s$, $DH = f$, all'asse CZ si descriva la iperbola equilatera CIQ dalla

equazione

equazione $2Ll + l^2 = s^2$, in cui a $CD = s$ corrisponde $DI = l$, e ne seguirà che dalla forza $DH = f$ verranno operate le distensioni $DI = l$...

XXVII. Sintantochè la forza $f$ non esca dal confine delle quantità infinitesime, cancellati nella formola (2.) i termini rispettivamente minimi, prende la stessa il seguente aspetto $\frac{2P}{L}\sqrt{2Ll} = f$, ovvero $l = \frac{Lf^2}{4P^2}$, e ci mostra a dire essere in tale circostanza l'allungamento $l$ della metà della fibra in ragione composta, diretta della lunghezza costante $L$, e del quadrato $f^2$ della forza variabile, che di traverso stimola la fibra intera, ed inversa del quadrato del peso, o forza tendente $P$, che altresì si considera come costante. Supponendosi finito il coefficiente $\frac{L}{4P^2}$, alla forza minima $f$ corrisponde la distensione $l$ minima del secondo ordine, siccome quella che ha una proporzione finita con $f^2$, e perciò rispettivamente nulla dee riputarsi. E perchè nella formola non ci entra la rigidità naturale $h$, la stessa forza in due fibre differenti solo nella rigidità naturale produrrà la medesima distensione. Se in due fibre sia costante la frazione $\frac{L}{P^2}$, ossia dire se i quadrati dei pesi, o delle forze stiranti seguitino la ragione delle lunghezze, le distensioni staranno come i quadrati delle forze normali alla detta fibra.

La ipotesi della forza $f$ infinita modifica così la formola (2.) $\frac{2P+h}{L} \cdot l = f$, o nella equivalente maniera $l = \frac{Lf}{2P+h}$, ne determina

l'allungamento

l'allungamento l. in proporzione composta, diretta della lunghezza data L, e della forza variabile f, ed inversa della somma parimente data della doppia forza tendente 2P, e della rigidità h conveniente alla fibra, mentre si trova nella positura A C B (fig. 9). Giacchè il coefficiente $\frac{L}{2P+h}$ si suppone finito, la distensione l, e la forza f saranno infinite dello stesso grado, e nella stessa fibra, o in fibre diverse, quando L : 2P+h si riferisca nella medesima proporzione, le distensioni abbraccieranno la ragione delle forze, che le producono. Che se due fibre non differiranno salvo che nella forza tendente, o nella rigidità naturale, più crescerà, o calerà uno di questi elementi, di quello che al contrario caleno, o crescano gli allungamenti.

XXVIII. Passando dal geometrico al fisico, le distensioni finite della medesima fibra si riferiranno in una ragione media fra la duplicata e la semplice delle forze parimente finite, onde traggon l'origine. Posto che le forze sieno minime fisicamente, le distensioni riceveranno con fisica adequazione la proporzione duplicata delle mentovate forze, la quale in fibre diverse nulla verrà turbata dalla naturale rigidità h, purchè questa non sia tanto grande, che impedisca il trascurare nella formola (7.) il termine $\frac{h\cdot\overline{2hl+l^2}^{\frac{1}{2}}}{L\cdot\overline{L+l}^2}$.

Aumentandosi notabilmente le forze, si allontaneranno le distensioni dalla ragione duplicata, e si accosteranno alla semplice delle forze suddette. In tali circostanze l'elemento della rigidità naturale non potrà trascurarsi, crescendo essa per altro, o scemando assai più, di quello che all'opposto scemino, o crescano le distensioni.

Accettuata la forza tendente P, sia tutto il

resto

restano pari; e giacchè in riguardo alla forza minima $l = \frac{Lf^2}{4P^2}$; ed in riguardo alla massima $l = \frac{Lf}{2P+h}$; ed in oltre le distensioni fisiche delle fibre assai più si accostano al minimo che al massimo; si corrisponderanno esse in una proporzione più vicina della inversa delle forze stiranti.

Nella formola (7.) si ponga l'allungamento $l$ proporzionale alla lunghezza $L$ della fibra, cioè a dire $l = nL$, e si troverà $f = 2P\sqrt{2n+n^2} + h \cdot \frac{\overline{2n+n^2}^{\frac{3}{2}}}{\overline{1+n}^2}$. Egli è di uopo adunque, che le forze siano fornite di tali grandezze, se nella ragione delle lunghezze hanno da corrispondersi le distensioni. Che se in due fibre la forza tendente $P$, e la rigidità $h$ saranno pari; l'omogeneo di comparazione avrà un valore costante, e la stessa forza o minima, o finita, o infinita produrrà in esse fibre distensioni proporzionali alle lunghezze.

XXIX. Deduco ora alcune fisiche conseguenze. Sintantochè le forze minime $f$ hanno una piccola ragione alla forza tendente $P$, ed alla rigidità naturale $h$, le distensioni $l$ stanno adequatamente come $f^2$, ed essendo quasi trascurabili rispettivamente ad $L$, la fibra oscilla senza notabile alterazione della sua lunghezza.

Da un allungamento insensibile si fa transito facilmente ad un altro, di cui l'anima si possa accorgere; imperocchè gli allungamenti piccoli crescono in una proporzione, che si avvicina assaissimo alla duplicata delle forze $f$.

Potrebbe frattanto ben presto la distensione divenir troppo grande, se seguitasse ad

aver

aver luogo la legge testè nominata: ma cangiandosi essa, ed accostandosi a poco a poco le distensioni alla ragione semplice delle forze; gli allungamenti si aumentano più lentamente.

XXXVII. La determinazione congrua della forza tendente P, e della rigidità naturale h giova moltissimo per trattenere le distensioni f dentro certi discreti limiti, onde per un verso le palpitazioni delle parti minime componenti la fibra non riescano troppo fiacche, languide, e senza spirito, e per l'altro troppo violente.

Si rompe la fibra, qualora la sua tenacità viene superata dalla forza tendente. Ho notato nello Schediasma I. al numero XX. essere in una corda due cose diverse la rigidità che ripugna alle distensioni, e la tenacità che ne impedisce il rompimento sino ad un certo segno. Infatti si è per me nel citato luogo determinato, che in una corda di ottone la rigidità naturale equivaleva a libre 11 e 4 $\frac{1}{2}$, e la tenacità a libre 12 a un di presso. Quantunque al crescere della forza tendente P cali la distensione f, e come vedremo al numero XXXVIII l'aumento di tensione p cagionato dalla forza f, nulladimeno se P troppo si avvicina al valore della tenacità della fibra, la forza f può romperla.

Più ancora dannosa riuscirà la soverchia grandezza della rigidità h. La forza f, che non sia minima, produce in una corda più rigida distensione minore, e non pertanto mostrerò al numero XXXVI. che lo accrescimento di tensione è più grande. Quindi la stessa forza innocente rispettivamente alle fibre di un uomo adulto, e che risveglia una viva sensazione, può divenire pregiudiziale in riguardo alle fibre troppo rigide di un vecchio, benchè ad essa una sensazione debole corrisponda.

Non

## Schediasma III.

Non giova tampoco che la tensione, e la rigidità pecchino nel difetto; imperocchè (messa per ora da parte la maggior fatica dell'organo nascente in origine dallo scemamento della forza tendente, di cui al numero XXXVII. farò discorso) le distensioni effettuate dalla forza $f$ si aumentano soverchio, e ne nascono sensazioni analoghe al suono grave, che rende una corda troppo sottile, e poco tesa, che è quanto a dire senza corpo, e snervato.

XXXI. Ho detto al fine del numero XXVIII. che se in due fibre la tensione $P$, e la rigidità $h$ saranno pari; la stessa forza $f$ produrrà distensioni in ragione delle lunghezze. Suppongansi queste due fibre ugualmente grosse, e l'urto, che riceveranno dall'obbietto esterno, riuscirà alle lunghezze proporzionale; laonde le forze $f$ staranno come le lunghezze. Quindi la fibra più lunga verrà a proporzione più allungata della fibra più corta, e correrà maggior pericolo di restar danneggiata.

Ripiglio per mano la formola del numero XXVIII. $f = aP\sqrt{amn^2} + h\left(\frac{amn^2}{4m\hat{n}}\right)^{\frac{3}{2}}$, che determina i valori della forza $f$ atta a produrre le distensioni in proporzione delle lunghezze, ed osservo che se due fibre simili siano tese da forze proporzionali alle loro basi, e composte di materia egualmente rigida, staranno $P$, ed $h$ come $L^2$; ma parimente l'impressione dell'obbietto esterno, che segue la proporzione delle superficie, è relativa ad $L^2$; dunque lo stesso obbietto in due fibre simili, dotate delle descritte condizioni cagionerà allungamenti in ragione delle lunghezze. E concedasi ancora in tali fibre alle forze $f$ proporzionali ad $L^2$ corrispondano, conforme vedremo

## Schediasma III.

diremo al numero XXXVIII. accrescimenti di tensione altresì come $L^n$, ed anche la loro tenacità si riguardino nella medesima ragione, ne segue che un dato oggetto o recherà danno ad amendue le fibre, o a nessuna. Per la qual cosa sapientemente ha la Natura ordinato, che nei fanciulli le fibre crescano e in lunghezza, e in grossezza, essendo troppo esposte a ricevere detrimento le fibre soverchiamente lunghe, e sottili.

XXXII. Mi accingo presentemente a porre al confronto le forze $f$ cogli accrescimenti di tensione $\rho$, ch'esse cagionano nelle fibre. Gioverà questo paragone per indagare la fatica che soffre l'organo, la quale sta in ragione composta, diretta dalle aumentazioni di tensione $\rho$, ed inversa della forza $P$ dei muscoli stiranti la fibra, cioè a dire come $\frac{\rho}{P}$.

### Trovare la relazione tra la forza applicata a squadra al punto medio d'una fibra, e gli accrescimenti di tensione, ch'essa nella detta fibra cagionano.

Ripetuta la curva $CHh$ (fig. 14.), le cui assisse $CD = s$, e le ordinate $DH = f$, tiro a squadra di $CD$, e parallela a $DH$ la linea $CB = L$. Conduco poscia la diagonale $BD$, e segnata $CN = \frac{1}{2} DH = \frac{1}{2} f$, descrivo $NO$ parallela a $DB$. Nella $HD$ prorogata taglio $DI = NO$, e pel punto $I$, e per altri similmente determinati fatta passare la curva $MIi$; dico che l'ordinata $DI$ esprime l'intera tensione $P+\rho$, che patisca la corda $CB$, dopo che la forza $DH$ ha in essa operato la saetta $CD$; e che per conseguenza, sottratta $DR = P$, e delineata

MRr

$MRN$ parallela a $CD$; il residuo $RI$ si agguaglia allo accrescimento di tensione $p$ causato nella mentovata corda dalla forza $DH$.

Dai triangoli simili $CDA$, $CNO$ si ricava l'analogia $CD : DA :: CN = \frac{1}{2}DH : NO = DI$

$$s : \overline{L+l} :: \tfrac{1}{2}f : \frac{\tfrac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{s},$$

che ci addita il valore di $DI = \frac{\tfrac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{s}$:

ma per l'equazione (2.) contenuta nel numero II. $\frac{\overline{P+p} \cdot s}{L+l} = \tfrac{1}{2}f$, o sia $\frac{\tfrac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{s} = P+p$; dunque $DI = P+p$, il che &c.

XXXIII. Egli è chiaro in primo luogo, che quando si agguagliano a nulla la forza $DH$, e la saetta $CD$, è nullo parimente l'accrescimento di tensione $RI$, e perciò la nostra curva passa pel punto $M$.

In grazia delle conseguenze stimo opportuno di porre sotto gli occhi di chi legge la formola, in cui non si contengono salvo che le due incognite $f$, $p$. Nell'ultima equazione si collochi in cambio di $s$ il suo valore $\sqrt{2Ll+l^2}$, onde si abbia $\frac{\tfrac{1}{2}f \cdot \overline{L+l}}{\sqrt{2Ll+l^2}} = P+p$. Maneggiata questa a dovere, si troverà $L+l = \frac{L \cdot \overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2 - \tfrac{1}{4}f^2}}$ (4.)

Una tale espressione di $L+l$ si sostituisca nella formola (1.) $\overline{\tfrac{1}{2}h+P} \cdot \frac{\overline{L+l}}{L} - \frac{\tfrac{1}{2}hL}{L+l} = P+p$, della quale ho fatto uso nel numero II., e ne risulterà $\frac{\overline{\tfrac{1}{2}h+P} \cdot \overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2 - \tfrac{1}{4}f^2}} - \frac{\tfrac{1}{2}h\sqrt{\overline{P+p}^2 - \tfrac{1}{4}f^2}}{P+p} = P+p$, ed adempiuti i necessarj calcoli, $P + \frac{hf^2}{4 \cdot \overline{P+p}^2} = \sqrt{\overline{P+p}^2 - \tfrac{1}{4}f^2} = CO$ (9.).

A buon conto si noti, che restando esclusa dalla

dalla formola la spezie $L$, la varia lunghezza della fibra non ha per se stessa luogo nel determinare lo accrescimento di tensione $p$, il quale, essendo il resto pari, si scoprirà sempre costante, qualunque sia la lunghezza della fibra. Ho detto per se stessa, perchè conforme si è veduto nel numero XXII. la lunghezza delle fibre c'entra nello stabilire la misura della forza esteriore $f$.

Quando è minima la forza $f$, si trova $\sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2} = P+p - \frac{\frac{1}{4}f^2}{P+p}$. Avremo pertanto $P + \frac{hf^2}{4\cdot\overline{P+p}^2} = P+p - \frac{f^2}{4\cdot\overline{P+p}}$, o sia $\frac{\overline{h+P+p}\cdot f^2}{4\cdot\overline{P+p}^2} = p$, e cancellate le quantità rispettivamente nulle, $\frac{\overline{h+P}}{4P^2}\cdot f^2 = p$. Supponendosi data la grandezza $\frac{h+P}{4P^2}$, ne segue che le aumentazioni di tensione $p$ stanno come i quadrati $f^2$ delle forze minime, onde vengono prodotte, e che conseguentemente appartengono al secondo ordine degli infinitamente piccoli.

Ho avvertito al numero XII. essere la forza infinitesima $f = \frac{2Ps}{L}$, e quindi dedurremo $\frac{\overline{h+P}}{4P^2}\cdot f^2 = \frac{\overline{h+P}\cdot s^2}{2L^2} = p$. Impariamo da questa formola, che a $CD = s$ minima corrisponde $KI = p$ infinitesima del secondo grado, che la linea $MK$ tocca la curva $MI$ nel punto $M$, e che la detta curva verrebbe combaciata nel nominato punto da una parabola Apolloniana, il cui vertice $M$, ed il parametro $\frac{2L^2}{h+P}$.

Immaginiamoci infinita la forza $f$, e dalla sola considerazione della figura ricaveremo, che siccome in tal caso $CD = s$ uguaglia adequatamente $DB = L+l$, non altrimenti

CN


uier
anni

CN = NO; ovvero analiticamente $\frac{1}{2} f = P + p$, e trascurata, se così piace, la quantità incomparabile P, $\frac{1}{2} f = p$, cioè a dire gli accrescimenti di tensione $p$ come le forze infinite $f$, da cui sono cagionati. Il valore di $p = \frac{1}{2} f$ non resta in conto alcuno alterato dalla diversa misura della rigidità $h$, e della forza tendente P.

Nella supposizione, che abbiam per le mani, è $CO = \frac{1}{2} h + P$. E voglia il vero, pongasi in vece di $P+p$ il suo valore $\frac{1}{2} f$ nella formola (g) $CO = P + \frac{hf^2}{6 \cdot \overline{P+p}^2}$, e ne proverrà $CO = P + \frac{1}{2} h$, conforme si dovea ritrovare. L'analogia

$CA : CD :: CO : CN$

$L : s :: P + \frac{1}{2} h : \frac{1}{2} f$

somministra l'equazione scoperta al numero XII. conveniente alla forza infinita $\frac{\overline{P + \frac{1}{2} h} \cdot s}{L} = \frac{1}{2} f$.

Sostituito in cambio di $\frac{1}{2} f$ il suo valore $P+p$, ci si presenta $\frac{\overline{P + \frac{1}{2} h} \cdot s}{L} = P + p$; espressione da cui si raccoglie, che segnata $DQ = \frac{1}{2} DX = P + \frac{1}{2} h$, e congiunti i punti C, Q con una linea, che si continui all'infinito, servirà questa di assintoto alla curva MOi.

XXXIV. Avendo osservato che posta $f$ minima, la tensione aggiunta $p$ è immensamente più piccola, e che divenendo $f$ infinita, $p = \frac{1}{2} f$, ne dedurremo che, stando nei confini del finito, l'accrescimento di tensione $p$ è sempre minore della metà della forza $f$. Questa riflessione ci addita il magistero ammirabile della Natura, la quale ha disposto che le forze estrinseche agiscano trasversalmente, e non direttamente nelle fibre degli organi. Se agissero direttamente, si aumenterebbe la tensione per l'intera forza $f$. Operando le forze estrinseche

di

di traverso, si accresca la tensione per la quantità $p$; che quando le fibre non restano molestate, è assaissimo minore di $f$, e che mentre $f$ sia molto grande, non può mai giungere a pareggiarne la metà. Con sì stupendo artifizio si mettono le fibre in un'agitazione spiritosa atta a risvegliare nell'anima le sensazioni, con pochissima alterazione della loro consueta tensione.

XXXV. Conciossiachè in un caso estremo sia $p$ come $f^2$, e nell'altro $p$ come $f$; si inferisca che più crescono o scemano le aumentazioni di tensione $p$, di quello che parimente crescano o scemino le forze pure trasversali.

Più conseguenze fisiche possono ricavarsi. E primieramente aumentandosi la forza esteriore, cresce e con maggior proporzione la fatica dell'organo; e perciò quando la mentovata forza è troppo grande, e continuata, l'organo facilmente si stanca. La assidua contemplazione dei luminosi corpi celesti affatica talmente gli occhi degli Astronomi, che a più d'uno è accaduto di rimaner privo della vista in tempo della vecchiaja.

Agevolmente si passa dall'insensibile al sensibile, o a rovescio, dal piacevole al disgustoso, o a rovescio. All'accrescimento di tensione $p$ non corrisponde sensazione. Se per accertarla, faccia bisogno l'ingrandimento di tensione $4p$; si otterrà questo effetto con aumentare la forza trasversale $f$ pochissimo più del doppio.

Nell'organo delicatissimo della vista, che ricoprendolo colle palpebre, o colle mani, o volgendo altrove la faccia, si difende dall'empito di una luce troppo violenta, la Natura si serve di una bellissima industria, perchè non si passi con tanta facilità dal sensibile all'insensibile, dal grato all'ingrato. Consiste questa nel potersi allargare, o ristrignere il diametro della pupilla. Le dilatazioni, e i ristrignimenti si osservano

grandissimi

grandissimi in quegli animali, che son destinati a vedere di giorno, e di notte. Se il lume in=fiacchisca, si allarga assai la pupilla; per la qual cosa molto lume debole fa la stessa impressione, come un lume mediocre e di forza, e di quanti=tà. Accrescendosi il rigore della luce, si ris=tringe la pupilla, e la minore quantità compensa la forza maggiore. Anche gli altri organi avran=no forse degli equivalenti artifizj, che per an=cora non ci son noti.

XXXVI.. Mi faccio ora a ponderare qual parte possa avere la diversa rigidità $h$ della fibre nella fatica degli organi, la quale, sup=ponendosi costante la forza tendente $P$, serba la ragione degli accrescimenti di stiramento $p$:

La formola propria della forza minima $\frac{h+P \cdot f^2}{4P^2} = p$ ci manifesta, che assumendosi siccome dato il coefficiente $\frac{f^2}{4P^2}$, le aumenta=zioni di tensione $p$, mentre la forza $f$ sia pic=ciolissima, stanno come la somma $h+P$ della rigidità e della forza stirante. In tale circos=tanza adunque la fatica dell'organo si aumenta o si minora proporzionatamente meno di quello cresca, o si diminuisca la rigidità.

Si è già avvertito al numero XXXIII. che essendo infinita la forza $f$ e la varia rigidità $h$ delle fibre nulla influisce nella misura dell' aumento di tensione $p = 2f$

Quindi una forza finita cagionerà in=crementi di tensione, che all'ingrandire, o all'impicciolire della rigidità, si troveranno meno diversi di ciò che richiede la legge della forza minima.

Dalle premesse verità si desume la ragione, per cui un adulto più di un giova=ne, ed un vecchio più di un adulto è soggetto

a

ad stancarsi. Un adulto per modo di esempio non durerà tanto a leggere quanto un giovane, nè un vecchio quanto un adulto. Per risparmiare pertanto più che fosse possibile agli organi la fatica, ha il Sapientissimo Iddio providamente ordinato, che gli accrescimenti di questa riescano a proporzione minore di quelli della rigidità.

XXXVII. Di maggiore rilievo sono le conseguenze, che derivano dall'alterazione della forza tendente $P$.

Impariamo dalla formola spettante alle forze infinitamente piccole $\frac{h+P \cdot f^2}{4P^2} = p$, che le aumentazioni di tensione crescono, o calano con proporzione più rimota di quella, onde al contrario calano, o crescono le forze tendenti $P$. In fatti se $h$ variasse nella stessa ragione di $P$, si troverebbe $\frac{h+P}{4P^2}$ come $\frac{1}{P}$, e li accrescimento di tensione $p$ starebbe inversamente come la forza spirante $P$. Ma supponendosi la rigidità $h$ costante, ne segue che se cala la forza tendente $P$, la somma $h+P$ è proporzionatamente maggiore di $P$, e se la detta forza ingrandisca, la quantità $h+P$ è a proporzione minore di $P$. Perciò rettamente ho asserito, che gli accrescimenti di tensione si corrispondono in una ~~proporzione più lontana~~ relazione più lontana dalla reciproca delle forze tendenti. E giacchè la fatica dell'organo sta come $\frac{p}{P}$, si conchiude che essendo minima la forza esteriore, più si aumenta, o si minora la fatica dell'organo, di quello ricerca la ragione inversa duplicata delle forze tendenti.

Mi rivolgo all'opposto limite della forza infinita, e posto che questa non patisca altera-

zione

zione, trovo costante l'incremento di tensione $p = \frac{1}{2} f$. Per la qual cosa la fatica dell'organo $\frac{p}{P}$ serberà la ragione reciproca delle forze tendenti P.

Quindi possiamo sicuramente affermare, che quando è finita la forza f, la fatica dell'organo prende regola da una proporzione più lontana della inversa delle forze stiranti.

Ora si capirà la ragione, per cui alle donne infievolite dal parto recente, nelle quali si è scemata la tensione delle fibre, cagioni stanchezza e fastidio la forza quantunque moderata del lume, del suono, e degli odori. Gioverà parimente a coloro, che si fanno cavar sangue, il riparare gli occhi dalla luce soverchia, potendo questa produrre nelle fibre meno tese dell'organo della vista una impressione troppo grande, e nociva.

XXXVIII. Conchiuderò questo Schediasma coll'indagare, se la varia lunghezza delle fibre rechi modificazione veruna alla fatica degli organi.

Posto che le fibre siano simili di figura, stirate da forze proporzionali alle loro basi, formate di materia egualmente rigida; le forze tendenti P, le rigidità h, e le impressioni f delle forze estrinseche stanno come $L^a$. Aggiungo che ancora gli accrescimenti di tensione p abbracciano la medesima ragione. Mi vaglio qui parimente, come altrove ho praticato, di una dimostrazione indiretta. Supposti h, f, e P, p come $L^a$, cerco la proporzione di P, e trovandola anch'essa come $L^a$, inferisco che se P serberà la ragione di $L^a$, verrà questa altresì accettata da P, p, e conseguentemente

ancora

ancora da provarsi. Presa per mano la formola generale (9.) $P + \frac{hf^2}{4\,\overline{P+p}^2} = \sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$, osservo che nella suddetta supposizione ciascun dei due termini $\frac{hf^2}{4\,\overline{P+p}^2}$, $\sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$ sta come $L^2$, e perciò $P$, che si eguaglia alla differenza dei termini stessi, si scopre proporzionale ad $L^2$; il che [illegible]

Venendo la fatica dell'organo contrassegnata dalla frazione $\frac{p}{P}$, ed essendo nel nostro caso tanto il numeratore, quanto il denominatore come $L^2$; si raccoglie che gli organi e grandi, e piccioli forniti delle descritte proprietà sosterrebbero una pari fatica.

XXXIX. Che se le forze tendenti, e le rigidità non si corrispondessero nella ragione delle basi delle fibre simili, si verificano le medesime conseguenze, che ho ricavate trattando delle fibre ugualmente lunghe e grosse, ma diversamente rigide e tese. Essendo le fibre dei fanciulli proporzionatamente più molli di quelle degli uomini fatti, si capisce il perchè l'organo per esempio della vista si stanchi più facilmente in quelli questi, che in quelli.

XXXX. Rispettivamente a due fibre varie solo nella lunghezza, l'impressione $f$ delle forze esterne sta come $L$. Le cose dette nel numero XXXV. ci ammoniscono, che gli accrescimenti di tensione $p$ proporzionali alla fatica del sensorio $\frac{p}{P}$ nella presente supposizione di $P$ costante, abbracciano una ragione media tra $f^2$, ed $f$: ma le forze $f$ serbano la relazione della lunghezza $L$; dunque la fatica dello

dell' organo seguirà una proporzione di mezzo fra $L^2$, ed $L$.

Perciò paragonati insieme due sensorj composti di fibre del pari grosse, rigide, e tese, e diverse solamente nella lunghezza; quello soffrirà maggiore fatica, che sarà fornito di fibre più lunghe.

Finisco colla riflessione, che dipendendo la fatica dell' organo dalla combinazione di più elementi, non ci dobbiamo maravigliare, se l' azione del medesimo obbietto esterno, affatichi diversamente gli organi di uomini quantunque sani, e che nel fiore dell' età si trovano.

# Schediasma IV.
## Delle vibrazioni delle corde sonore.

I. I più usitati stromenti musici sono tutti formati di corde solide, o fluide, di minugia, di metallo, d'aria, la quale è il corpo che suona negli stromenti da fiato. Nè questa scelta è senza la sua ragione; imperciocchè col suono predominante di una corda espresso dalla unità sono incorporati, come vedremo, i suoni 2, 3, 4, 5, 6, &c., che al principale si riferiscono nelle proporzioni fra tutte le più semplici. Gli altri corpi sonori accoppiano insieme suoni, che avendo tra loro stranissime relazioni, non possono, quantunque coperti dal principale, intieramente appagare l'orecchio. Essendo adunque le corde più di qualsivoglia altro corpo adattate alla Musica, ad esse rivolgo le mie riflessioni; e delle loro vibrazioni, e principalmente di quelle delle corde solide cercando le leggi, do principio dallo scioglimento del seguente problema.

*Determinare la curva, nella quale si dispone una corda tesa, che si vibra.*

II. Suppongasi ADB (Fig: 15.) la curva cercata. Sia BH = x; HK = dx, HD = y, Ge = dy, De = ds, ed ID = Ie = r raggio osculatore. Condotte le minime tangenti DP, eP, e compiuto il parallelogrammo PN, m'insegnano i canoni delle forze composte, che la tensione D della corda eD, la qual tensione si mantiene costante; perchè suppongo minima la saetta CI, sta alla forza f, che la spinga per la direzione PN, come DP : PN : ma

DP

## Schediasma IV.

$DP : PN :: DD : De$; dunque analiticamente $P : f :: dv : ds$, e conseguentemente $f = \frac{Pds}{v}$ si è quella forza, che sollecita la particola $De$ per la direzione $PD$, la quale supponendosi, conforme ho detto, la saetta $CB$ infinitamente piccola, è adequatamente la stessa colla direzione $DH$.

Dinotisi $M$ la massa della corda intera, $L$ la sua lunghezza, e si troverà la massa della nostra particella $De$ uguale ad $\frac{Mds}{L}$. Se divideremo per detta massa la forza sollecitante $f = \frac{Pds}{v}$, ne risulterà la forza acceleratrice per la nominata direzione uguale ad $\frac{LP}{Mv}$. Fatta la riflessione, che se tutti i punti della corda hanno da pervenire alla linea retta $ACB$ nel tempo stesso, le forze acceleratrici debbono serbar la ragione delle ordinate $HD = y$, ci accorgeremo di essere giunti all'equazione $\frac{LP}{Mv} = \frac{y}{a}$, o sia $\frac{LaP}{My} = v$; da cui ci viene mostrata a dito la proprietà essenziale della nostra curva, che i raggi osculatori stanno in ragione inversa delle ordinate, e conseguentemente ancora delle forze accelleranti (a).

III. Quando

(a) Per non defraudare il primo Inventore della dovuta lode, ingenuamente confesso che sino a questo segno ho seguito il metodo tenuto dal Signor Taylor nella sua Opera Methodus Incrementorum directa, et inversa, pag. 88.

III. Prendo il seguente metodo dal P. Vincenzo Riccati mio fratello (6) per determinare con semplicità la misura del raggio osculatore $v$. Si tagli $DL = a$, e dal punto $L$ conducasi $LM$ normale ad $ID$, la quale taglierà $CK$ continuata nel punto $O$. Giacchè $LM$ interseca ad angolo retto il raggio combaciante $ID$; sarà parallela a $DC$, e quindi $CO = DL = a$. Dal punto $O$ si delinei $OT$ normale al raggio $IC$, la quale taglierà nel punto $V$ l'altro raggio $ID$. Chiamata $DM = q$, sarà $MV = dq$.

Per la similitudine dei triangoli $CGD$, $LMD$ avremo $CG : DC :: LM : LD$: ma essendo il triangolo $OMV$ simile all'$ITV$, o all'$IDC$; sarà $DC : MV :: ID : OM = LM$; dunque ex aequo perturbate $CG : MV :: ID : LD$, o sia analiticamente $dy : dq :: v : a$, e perciò $v = \frac{ady}{dq}$. Serbando simiglianza i due triangoli $DCG$, $DLM$, ci si presenta l'analogia

$DM : DL :: DG : DC$

$q : a :: dx : ds$; da cui si ricava l'equazione $q = \frac{adx}{ds}$.

Tolta nuovamente per mano la formola $\frac{LaP}{My} = v$, e surrogato in cambio di $v$ il valore ritrovato $\frac{ady}{dq}$ avremo $\frac{LaP}{My} = \frac{ady}{dq}$, o pure $\frac{LP\,dq}{M} = ydy$, ed integrando, $\frac{LPq}{M} + g = \frac{y^2}{2}$. Si determina la costante $g$, riflettendo che quando

(6) De principio conjungendo cum principio actionis ad determinandas proprietates motus liberi, ac curvilinei.

quando l'ordinata y ha il massimo valore, e si eguaglia a CZ = c, la linea DP cade sopra la DZ, ed unendosi i punti L e M, è DM = g = DL = a. Sostituiti questi valori nella formola generale, si tramuta così $\frac{LPa}{M} + g = \frac{c^2}{2}$, e mi somministra il valore della costante $g = \frac{c^2}{2} - \frac{LPa}{M}$. Colloco questa in cambio di g nella formola generale, ed ho l'espressione compiuta $c^2 - y^2 = \frac{2LP}{M} \cdot \overline{a - y}$; ma $y = \frac{a\,dx}{ds}$; dunque $c^2 - y^2 = \frac{2LP}{M} \cdot \overline{a - \frac{a\,dx}{ds}}$. Nella presente supposizione, che y sia minima rispettivamente ad x, e dy rispettivamente a dx, abbiamo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx + \frac{dy^2}{2dx}$; dunque

$$c^2 - y^2 = \frac{2LP}{M} \cdot \overline{a - \frac{a\,dx}{dx + \frac{dy^2}{2dx}}} = \frac{aLP\,dy^2}{M\,dx^2},$$

e conseguentemente $dx = \sqrt{\frac{aLP}{M}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$, ed integrando, $x = \sqrt{\frac{aLP}{M}} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$.

IV. Resta che si determini il valore della costante a. Descritto col raggio CZ = c il circolo fQZafZ, e prorogata DG sino in Q, si taglia l'arco fQ = z, il quale diviso pel raggio CZ = c si eguaglia a $\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$, conforme sanno i Geometri. Avremo dunque $x = \sqrt{\frac{aLP}{M}} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{aLP}{M}} \cdot \frac{z}{c}$. Si verifica essere l'ordinata y = 0, mentre l'arco z si eguaglia al nulla, o pure ad 1, 2, 3, &c. semicircoli. Si chiamino

n

n questi numeri 0, 1, 2, 3, &c. di se micircoli, è posto il quadrante $fQ7 = b$, sarà $y = 0$, quando l'arco $z$ accetti uno dei valori $nb$. Il caso di $n = 0$ appartiene al punto B, in cui $x$, $y$, $z$ pareggiano il nulla. Per tal motivo non si è aggiunta la costante nell'ultima integrazione. Col mezzo delle altre grandezze di $n$ si stabiliscono infiniti valori della costante $a$. Si osservi che mentre $x = BA = L$, esser deve $y = 0$, e per conseguenza $z = nb$. Adempiute queste sostituzioni, ci si presentava $L = \sqrt{\frac{aLP}{M}} \cdot \frac{nb}{c}$, formola, da cui si ricava $\frac{c^2LM}{4n^2b^2P} = a$. Fatto uso di un tal valore, troveremo finalmente $x = \frac{cL}{nb}\int\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}} = \frac{Lz}{nb}$, equazione delle infinite curve, nelle quali si può ripiegare oscillando la corda AB.

Costruzione

V. Delineo col raggio $C7 = c$ il circolo $fQ7afz7$, e tagliato ad arbitrio l'arco $fQ = z$, pel punto $Q$ tiro l'indiffinita $QD$. Taglio poi $BH = x$ uguale alla grandezza quarta proporzionale dell'analogia

$$n \cdot fQ7af : fQ :: BA : BH$$
$$nb \quad : \quad z \quad :: \quad L \quad : \quad x$$

e condotta $HD$ normale a $BC$, taglierà essa la linea $QD$ nel punto $D$ spettante alla nostra curva.

VI. Se $n = 1$, la corda si adatta alla curva nella fig. 15. delineata, e l'ordinata $y$ ha un solo massimo valore. Se $n = 2$, la corda si vedrà divisa in due parti uguali AS, SB (fig. 16.) separate da un punto stabile, o nodo S; e l'ordinata $y$ ha due

massimi

massimi valori (7, 2(27), uno positivo, e l'altro negativo. Tremerà la corda divisa in tre parti eguali AS, SS', S'B (Fig. 12), mentre sia $n=3$, le quali saranno frammezzate da due punti immobili S, S'. I massimi valori della ordinata $y$ ascenderanno al numero di tre, due positivi, ed un negativo. Generalmente si eguaglierà ad $n$ il numero delle parti eguali, nelle quali si distribuisca la corda, e dei massimi valori parimente eguali della ordinata $y$, che a vicenda saranno uno positivo, e l'altro negativo. Il numero dei nodi si eguaglierà ad $n-1$.

Si cavi l'importantissima conseguenza, che una corda tesa non può vibrarsi salvo che o intera, o divisa in parti eguali. Nella vibrazione della corda sonora la Natura accoppia insieme questi diversi moti con mirabile meccanismo, insegnandoci alcuni esperimenti, come vedremo, che una corda si vibra e tutta intera, e divisa in parti eguali, e ciò sino a minutissima distribuzione.

Dalla notata proprietà, che una corda non può oscillare se non sia intera, o divisa in parti eguali, deriva la spiegazione dei suoni delle due trombe, marina e da fiato. Questi stromenti sono forniti di una sola corda, di minugia in un caso, e d'aria nell'altro, la prima delle quali è resa idonea all'oscillazione da una forza stirante, e la seconda da una forza premente, cioè a dire dal peso dell'atmosfera. Le due trombe adunque non possono rendere altri suoni, salvo che quelli, che traggon la origine dallo vibrarsi la unica loro corda o intera, o in parti eguali distribuita.

VII.

VII. "Nel determinare la figura delle curve, a cui si adatta la corda AB (fig. 15. 16. 17. &c.), non hanno punto luogo nè la massa M della corda, nè la forza tendente P, le quali sono escluse dalla equazione $x = \frac{Lz}{2nb}$.
I soli elementi atti a variare la detta figura (supposto che paragonando insieme più corde, il numero n abbia rispettivamente a tutte lo stesso valore) sono la lunghezza della corda $AB = L$, e la saetta $CD = c$, a cui sono proporzionali il quadrante $fQD = b$, e gli archi $fQ = z$ corrispondenti ad angoli eguali $fCQ$. Quindi se le saette stieno come le lunghezze, ne risulteranno curve simili.

La forza acceleratrice $\frac{y}{a}$ la troveremo eguali a $\frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$, sostituito in cambio di a il suo valore; e perciò si vede, che nella loro determinazione ci entrano quegli elementi M, P, che nulla influiscono nella figura della curva ADB.

VIII. Segnata $CX = fQD$ (fig. 15. 16. 17. &c.), e condotta la linea XB, tocca questa le nostre curve nel punto B. Si chiami p la suttangente gZ, che corrisponde al punto D, o sia all'ordinata $gD = \frac{L}{2n} - x$; e per la nota formola si avrà $\frac{L}{2n} - x \cdot \frac{dy}{dx} = p$. Sostituisco in cambio di x, e di dx i loro valori $\frac{Lz}{2nb}$, $\frac{cLdy}{2nb\sqrt{c^2-y^2}}$, e trovo dopo fatte le necessarie operazioni $\frac{b - z\sqrt{c^2-y^2}}{c} = p$: ma rispettivamente al punto B, $fQ = z = 0$, $HD = y = 0$; dunque in tal caso $b = p$, cioè a dire la sottotangente CX uguale al quadrante fQD: il che &c.

L'

# Schediasma IV.

La ultima formola $\frac{b-2\sqrt{c^2-y^2}}{c} = p$ mi addita la maniera facile di condur la tangente a qualunque punto D della curva col mezzo dell'analogia

$$cZ : DyZ :: gD : gZ$$
$$c : b-z :: \sqrt{c^2-y^2} : p,$$

la quale determina la sottotangente $gZ = p$.

IX. Per intero compimento della soluzione del nostro problema egli è di uopo dimostrare, che conformata una corda ad una delle curve delineate nella fig. 15. 16. 17. &c, e cominciando poscia a vibrarsi, si adatta sempre in qualunque istante ad una curva di simil natura, di modo che le forze di qualsisia punto abbraccino la ragione della distanza dall'asse AB, o sia degli spazj, che rimangono da percorrersi. Sia AZDB (fig. 16.) o la curva della figura 15., ovvero uno de' rami delle figure 16. 17. &c, in cui sia disposta la corda AZDB, e giacchè le forze dal punto medio Z, e di qualsivoglia altro punto D stanno come le distanze $ZC = c$, $DH = y$, produrranno in tempo minimo velocità proporzionali alle stesse distanze, colle quali scorreranno gli spazj Zf, Dd, che si riguarderanno nella medesima ragione. Quindi gli spazj residui fC, dH si scopriranno essere come i totali ZC, DH, e perciò posto $fC = kc$, sarà $dH = ky$, e la sua differenza $= kdy$: ma pel numero IV. $dx = \frac{cL}{anb} \cdot \frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$; dunque avremo altresì $dx = \frac{kcL}{ankb} \cdot \frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2-k^2y^2}}$, equazione della curva AfdB della stessa natura di quella della curva AZDB. Dal numero VII. si raccoglie, che uguagliandosi le forze acceleratrici

dei

dei punti 7, D nella grandezza $\frac{4n^2b^2p.c}{c^2LM}$; $\frac{4n^2b^2py}{c^2LM}$; le forze dei punti f, d pareggieranno la quantità $\frac{4n^2k^2b^2p.kc}{k^2c^2LM} = \frac{4n^2b^2p.kc}{c^2LM}$, $\frac{4n^2k^2b^2p.ky}{k^2c^2LM} = \frac{4n^2b^2p.ky}{c^2LM}$, e che per conseguenza saranno le forze dei punti 7, f; D, d come le relative lontananze dalli asse AA.

Nel secondo minimo tempicello dalle forze dei punti f, d verranno generati elementi di velocità, che staranno fra loro come le dette forze, ch'è quanto a dire come gli spazj resi: dui da percorrersi fC, dH, o come i totali 7C, DH. Colle velocità acquistate nei due tempicelli ambe proporzionali alla linea 7C, DH si passeranno spazj frf, drd in ragione delle stessa linea; onde gli spazj rimanenti rfC, rdH accetteranno la medesima proporzione, e posta $rfC = kc$, sarà $rdH = ky$, ed alla curva ArfrdA competerà l'equazione $dx = \frac{kcL}{nnkb} \cdot \frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2-k^2y^2}}$. Il numero VII. mi insegna eguagliarsi le forze dei punti rf, rd alla costante $\frac{4n^2b^2p}{c^2LM}$ moltiplicata nella distanze rfC, rdH dalli asse AA, non altrimenti che quella dei punti 7, D; f, d.

Troveremo le stesse conseguenze conside: rando la figura della corda, e le forze dei suoi punti dopo i tempi minimi terzo, quarto, quinto, &c; e finalmente conchiuderemo, che in qua: lunque istante la corda si adatta alla curva della equazione $dx = \frac{kcL}{nnkb} \cdot \frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2-k^2y^2}}$, in cui a k competono ordinatamente tutti i valori, che

principiano

principiano dalli centri, e vanno a terminare nel nulla, e che qualsivoglia punto D è sempre accelerato da una forza eguale al prodotto della costante $\frac{4\pi^2 b^2 p}{c^2 L M}$ nella lontananza dall'asse AB.

X. Quantunque le corde esempigrazia di un gravicembalo si sogliano incitare alla oscillazione con una penna, che fa loro prendere una figura triangolare, nulladimeno non ritengono questa figura, ma posto che rendano un suono solo, ben presto si conformano alla curva nel numero V. determinata. Per mettere in chiaro un tal punto, egli è di uopo provare, che sono proporzionali alle ordinate infinitesime DH, dH (fig. 14.) le forze acceleratrici dei punti D, d, appartenenti a due curve AZDB, AfdB, che abbiano l'assissa comune BH, e le dette ordinate in data proporzione come $1 : k$, onde posta $DH = y$, ed i suoi elementi primo, e secondo $dy$, $ddy$, sia $dH = ky$, ed i suoi elementi primo, e secondo $kdy$, $kddy$.

Poichè (fig. 15.) le linee el, NP adequatamente parallele congiungono le linee eN, lP parallele, e prossimamente uguali, passerà fra loro adequata eguaglianza, ed essendo $el = -\frac{1}{2} ddy$, si scoprirà parimente $PN = -\frac{1}{2} ddy$: ma giusta l'osservazione fatta al numero II. $DP = \frac{1}{2} ds : PN = -\frac{1}{2} ddy :: p : f$; dunque $f = -\frac{p\, ddy}{ds}$, valore della forza assoluta, o sollecitante, che diviso per la massa $\frac{M ds}{L}$ dell'elemento De della corda BD, mi suggerisce la grandezza della forza accelerante il punto D $= -\frac{L p\, ddy}{M ds^2}$. L'adequazione fra $ds$, e $dx$, che si è assunta come costante, fa vedere

potersi

potersi considerare invariabile la quantità $\frac{LP}{M d_s^2}$, e per conseguenza essere la forza acceleratrice del punto D proporzionale alla seconda differenza $= -ddy$ dell'ordinata $HD = y$. Dalle cose non ha molto dette si raccoglie, che le seconde differenze delle ordinate (fig. 14.) HD, Hd, che si riferiscono nella ragione data $1 : K$, abbracciano la stessa ragione; dunque le forze acceleratrici dei punti D, d stanno fra loro come le ordinate HD, Hd.

XI. Premessa questa necessaria dimostrazione, non abbia ancora la corda AZDB presa la figura del numero V. ma sia talmente incurvata, che la forza, e la velocità del punto Z abbia maggior proporzione alla forza e alla velocità del punto D. di quella che passa fra le distanze ZC, DH dall'asse AA. In un minimo tempo si scorreranno dai punti Z, D gli spazj Zf, Dd proporzionali alla loro velocità, e quindi sarà $Zf : Dd$ in maggior proporzione di $ZC : DH$, e per conseguenza ne risulterà $fC : dH$ in minor proporzione di $ZC : DH$. Se fosse $ZC : fC :: DH : dH$, ho provato che la forza in Z alla forza in f si riferirebbe nella stessa ragione della forza in D alla forza in d. Ma essendo fC minore di quello che la detta proporzione richiede, e diventando sempre più piccola la seconda differenza della ordinata fC, a cui è proporzionale la forza nel sito f, quanto più la corda AfdB si avvicina alla linea retta ACB; ne segue che la forza in f alla forza in d avrà minor proporzione della forza in Z alla forza in D. Seguitando adunque la corda la sua vibrazione, le forze dei punti Z, D si anderanno sempre più accostando alla proporzione delle lontananze dall'asse AB, sintantoché giunta la corda nella positura AzfdB,

la

le dette forze si riguarderanno nella ragione di nfC : ndH, e la corda si sarà adattata alla curva del numero V.

XII. In tale circostanza egli è di uopo provare, che anche le velocità accettano la proporzione medesima, onde la corda conservi la figura di una delle mentovate curve. Sia CD un elemento della nostra corda. Al punto medio G conduco la tangente GP, la quale si confonde coll'arco CD. Movendosi i punti C, G, D per la direzione dei loro raggi osculanti, chi è normale alla tangente GP, si girano intorno al punto P, quando le velocità siano proporzionali alle distanze CK, GI, DH, ossia ai raggi PC, PG, PD, e descrivono archetti in ragione di esse distanze; ed in questa supposizione il moto di un punto nulla influisce in quello degli altri. Ma se le velocità da C verso D vanno scemando più di quello la nominata proporzione richiede, si comunica il movimento del punto C al vicino dalla parte di D, e così da punto a punto contiguo, sino a che tutti i punti dell'elemento CD camminino con velocità proporzionali alle relative lontananze dall'asse AA. Le cose dette dell'elemento CD si applichino agli altri elementi della nostra corda, i punti della quale ben presto si ridurranno a vibrarsi con velocità proporzionali alle distanze dall'asse AB col mezzo della comunicazione del moto, che sarà compiuta in quell'istante, e non prima, in cui nel sito AnfndB le forze accettano la ragione di esse distanze. Ed in fatti essendo sempre le forze, e per conseguenza anche le accelerazioni in tempi minimi pari fra i punti 7, nf proporzionatamente maggiori di quella fra i punti D, nd, questi eccessi di velocità

si

si distribuiscono alle altre particole della corda, le quali solo nella posizione A f a d k sono fornite di forza, e di velocità in ragione delle relative distanze dall'asse AB.

XIII. Tralascio di prendere per mano altri casi, come per esempio che la forza del punto 7 alla forza del punto D stia in maggior proporzione, e tutto all'opposto la velocità del punto 7 alla velocità del punto D in proporzione minore di quella, che passa fra le distanze 7C, DH; perchè mettendosi al tremito la corda conforme è consueto o con una penna, o colle unghie, o battendola, ha sempre luogo in natura la mia pratica supposizione. E vaglia il vero, nell'atto che la corda principia a vibrarsi ha la figura triangolare A 7 B (fig. 19.), in cui il solo punto 7 è fornito di forza, rimanendone gli altri privi, a cagione che gli elementi delle due porzioni di corda A7, 7B non sono punto incurvati, e la seconda differenza di qualsivoglia ordinata HD, a cui è proporzionale la forza accelerante il punto D, si eguaglia al nulla. Cominci la oscillazione, e la mentovata forza del punto 7 imprime velocità al detto punto, la quale col mezzo della comunicazione del moto passa agli altri punti, di modo che la corda un poco si incurva, e prende la figura A f d k dotata della proprietà, che la forza e la velocità del punto f alla forza ed alla velocità del punto qualunque d si riferisca in proporzione maggiore di fC : dH.

Trovare il tempo impiegato da una corda tesa nel fare una vibrazione.

XIV. Conciossiachè tutti i punti della corda giungano nel tempo stesso alla retta A C B (fig. 15.), egli è indifferente il considerare il moto di qualunque punto. Scelto

per

per esempio il punto Z, sia esso giunto al sito a, e chiamata Ca = y, sarà la forza acceleratrice $\frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$. Avremo adunque per la nota formola, mentre si dica u la velocità della particola Z nel sito a
$-\frac{4n^2b^2Pydy}{c^2LM} = udu$, e passando alla integrazione, $\frac{4n^2b^2P}{c^2LM}\cdot\overline{c^2-y^2} = u^2$. Ho aggiunta la dovuta costante, che quando è u=0 nella situazione Z, mi dia y=c. Estratta la radice, ci si presenta $\frac{2nb}{c}\frac{\sqrt{P.\overline{c^2-y^2}}}{\sqrt{LM}} = u = -\frac{dy}{dt}$, e conseguentemente $dt = \sqrt{\frac{LM}{P}}\cdot\frac{-cdy}{2nb\sqrt{c^2-y^2}}$.

La sommatoria di $\frac{-c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ si eguaglia all'arco ZY = b−z, e perciò troveremo integrando $t = \sqrt{\frac{LM}{P}}\cdot\frac{b-z}{2nb}$, misura del tempo, in cui la particola Z scorre lo spazio Za = c−y.

Pervenuta che sia la fibra Z al punto C, egli è da osservarsi che in tal circostanza ZY = z = 0, e per conseguenza $t = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{LM}{P}}$ tempo di una semivibrazione del punto Z, ed altresì per le cose dette di tutta la corda AZB. Quindi $t = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{LM}{P}}$ indicherà il tempo di una intera vibrazione della corda medesima.

XV. Ritroveremo il tempo t espresso a cagione d'esempio in secondi, paragonando la corda AZB con un pendolo a cicloide, il tempo di una vibrazione del quale generalmente si esprime per la frazione $\frac{2b}{c}$ moltiplicata nella radice della lunghezza. Sia h la lunghezza del

del pendolo, che batta una vibrazione per secondo, ed istituita l'analogia $t : \frac{1}{n}\sqrt{\frac{LM}{p}} :: 1 : \frac{2b}{c}\sqrt{h}$,

scopriremo $t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{ph}}$.

XVI. Confrontate insieme due corde, rispettivamente alle quali il numero $n$ abbia lo stesso valore, onde amendue si vibrino intere, o in pari numero di parti eguali distribuite, i tempi delle loro oscillazioni staranno come $\sqrt{\frac{LM}{p}}$.

Se le predette corde saranno formate della stessa materia, si chiami $d$ il loro diametro, e la massa $M$ si scoprirà proporzionale ad $Ld^2$. Sostituita questa grandezza in cambio di $M$, scopriremo i tempi delle vibrazioni come $\frac{Ld}{\sqrt{p}}$.

XVII. I tempi delle vibrazioni della stessa corda, che si agita o intera, o divisa in parti eguali, si corrispondono nella ragione $\frac{1}{n}$. Assegnati per tanto ad $n$ ordinatamente i suoi valori 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c., i mentovati tempi formeranno la serie armonica 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, &c.: ma i suoni, o il numero delle vibrazioni fatte in tempo pari stanno inversamente come i tempi di esse vibrazioni; dunque i suoni della medesima corda, che trema o intera, o distribuita in due, in tre, in quattro &c. parti eguali, vengono contrassegnati dalla serie aritmetica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. e tali realmente sono i suoni della tromba.

Non lascio di avvertire, che la corda BS (Fig. 16. 17.) si vibra nel medesimo tempo, e produce lo stesso suono e come parte aliquota della corda AB, e come corda solitaria, ed intera fermata immobilmente nel punto S.
Sia la lunghezza BS = $l$, e la massa = $m$,

e

e mentre la nostra corda, come si suppone, oscilli intera, averemo $t = \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{lm}{Ph}}$ : ma $l = \frac{L}{n}$, $m = \frac{M}{n}$; dunque $t = \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{LM}{n^2Ph}}$ $= \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{Ph}}$: che è quella formola stessa, per cui si esprime il tempo di una vibrazione della corda BS parte aliquota della corda AB. Questa verità non abbisognava di dimostrazione; imperocchè stando immobile in amendue le circostanze il punto S, la corda BS non può indovinare da qual cagione proceda la detta immobilità, e dee in un caso, e nell'altro in pari tempo oscillare.

XVIII. Se la corda AB (fig. 15.) fosse infinitamente lunga, la porzione finita BH, atta a rendere qualsivoglia suono, sarebbe parte aliquota della lunghezza infinita AB. Quindi la mentovata corda potrebbe in se stessa ricevere qualunque suono. Le corde di aria, col mezzo delle quali si diffonde il suono, debbono considerarsi infinitamente lunghe; perchè continuano esse all'indefinito o direttamente, o per via di riflessioni, e prima per opera della replicata resistenza si estinguono le vibrazioni sonore, di quello che manchi l'aria, a cui si possano comunicare. Or ecco la ragione, per cui l'aria ci porta qualsivoglia suono all'orecchio.

Io congietturo che organizzando l'orecchio abbia la Natura scavati nell'osso della tempia tre canali semicircolari, e una coclea, i quali insieme col vestibolo compongono la cavità, che chiamasi laberinto, acciocchè in essi racchiudasi un lungo nervo uditorio, che facendo figura di indefinito, possa in se ricevere qualunque suono. Il nervo uditorio, che per varj forellini

aperti

aperti nel cranio in faccia alla base della stapeda, e nel centro della chiocciola va speditamente al cerebro, si propaga per la cavità del laberinto; ed essendo assai molle, massimamente che il laberinto è sempre ripieno di umore, porzioni molto piccole e fisicamente minime della sua lunghezza corrisponderanno all'unisono esempigrazia colle corde di un gravicembalo, e cogli altri suoni al nostro orecchio sensibili; e perchè con fisica adequazione sono parti aliquote della totale lunghezza, possono concepire palpitazione. Se le dette parti sieno soverchiamente minime, diverranno inflessibili, e non potranno vibrarsi; che se del corpo sonoro determineranno queste parti soverchiamente lunghe, non saranno fornite di rigidità sufficiente, e non porteranno all'anima suono sensibile. Proviamo tutto giorno colla esperienza, che i più lunghi contrabbassi degli organi producono piuttosto un fremito muto che un suono; e perciò i suoni alla nostra orecchia sensibili deggiono essere ristretti fra certi limiti di gravità e di acutezza, che dallo accuratissimo M. Sauveur sono stati determinati.

XIX. Si potrebbe ancor sospettare, che il nervo uditorio fosse composto da un fascio di nervi, che per piccolissimi gradi passassero dal tuono più grave al più acuto, fra i quali si ponesse in fremito quello, che corrisponde all'unisono col corpo sonoro. Fingasi che i mentovati piccoli gradi sieno la decima parte di un comma; e giacchè non solo si comunicano i suoni unisoni esattamente, ma parimente quelli che all'unisono si avvicinano, insegnandoci l'esperienza che una corda fa tremar l'altra accordata in semituono minore uguale a quattro comma; ne seguirebbe che allo oscillare di un corpo sonoro si vibrerebbero oltre il nervo unisono quaranta nervi più acuti, ed altrettanti più gravi, gli estremi dei

quali

quali si corrisponderebbero a un di presso in seconda maggiore. Si udirebbe adunque una mescolanza di suoni, che formerebbe un suono falso, ed ingrato, il che certamente non addiviene. Per la qual cosa la prima mia conghiettura riceve lume maggiore, e sempre più inclino a credere, che intanto il nervo uditorio porti all'anima tutti i suoni dentro certi determinati confini, inquanto che possa far figura di indefinito.

XX. Ho promesso ai numeri I. e VI. di recare alcuni esperimenti, i quali facciano toccar con mano, che a un tratto e tutta intera, e divisa in parti eguali una corda sonora si vibra. Intanto non si odono senza molta attenzione i suoni delle parti aliquote, inquanto che il suono predominante della corda intera occupa talmente l'orecchio, che non glieli lascia così agevolmente discernere. Quello che ho detto della corda intera rispettivamente alle sue parti aliquote, si intenda altresì di una parte aliquota in riguardo alle sue ulteriori divisioni, e parimente di una parte aliquota messa al confronto d'un'altra notabilmente minore. Malgrado per altro la relativa fievolezza dei suoni delle parti aliquote di una corda, se la metteremo vigorosamente al cimento in poca distanza da uno scannello, sentiremo ponendovi la dovuta attenzione i suoni delle terze, e delle quinte parti, che al suono della corda totale si riferiscono, quello in quinta sopra l'ottava, questo in terza maggiore sopra la doppia ottava. Difficilmente si distinguono i suoni della metà, e delle quarte parti, che formano col suono fondamentale ottava semplice, e duplicata; perchè tali equisonanze si confondono, e per così dire si incorporano col suono della corda intera.

Chi

Chi volesse frattanto udire belli, e distinti i suoni delle parti aliquote, lavori una molla con un pezzo di corda di ottone delle più grosse, e le dia, se così gli piace, quella forma che nella fig. 20 sta espressa. Tenga questa molla nella mano sinistra; e stimolata, acciocchè si vibri, colla mano destra la corda AB (Fig. 16. 17. &c.) a un di presso nel sito C, prema subito colla molla uno de' punti S, 2S, &c.; e restando con ciò ammortiti i suoni della corda intera AB, e di quelle porzioni, che non sono parti aliquote della corda BS, S2S, &c., sentirà spiritoso, e chiaro il suono delle corde or ora mentovate. Per tal mezzo si udiranno quanto basta distinti sino i suoni delle parti trentesime.

XXI. Dovrebbe alcuno ridire, che prima dell'accostamento della molla ad uno de' punti S, 2S, &c. la corda AB non tremava divisa nelle parti BS, S2S, &c., essendo essa stata determinata dall'applicazione della nominata molla a sì fatta maniera di vibrazione. Rispondo che se la pressione della molla avesse indotta la corda AB ad oscillare compartita nelle porzioni eguali BS, S2S, &c., nulla servirebbe per sentire i suoni di esse porzioni più o meno forti, che fosse stata da me stimolata al moto piuttosto nei siti C, 2C, 3C, &c., che nei punti S, 2S, &c.; ma se la percuoto ne' primi siti odo un suono forte, se ne' secondi lo odo debole; dunque un tal suono dalla forza della molla non trae l'origine. Lo incurvare la corda in uno de' punti S, 2S, &c. è un modo inettissimo per imprimere alle parti BS, S2S, &c. le loro particolari vibrazioni, usandosi il massimo sforzo contro uno di que' punti, che le oscillazioni delle parti mentovate vogliono stabili, e non ripiegandosi veruna di esse parti, onde possa oscillare, e comunicare il tremito

alla

alla compagna. La esposta verità verrà messa in tutto il suo lume dalla seguente sperienza. Si applichi la molla per esempio al punto 2S (fig. 17.), e se si stimolerà poscia la corda nel posto S, fievolissimo giungerà all'orecchio il suono delle terze parti BS, S2S, 2SA. Tutto all'opposto imprimendo il moto nei siti C, 2C, 3C, concepiscono le dette parti un suono chiaro e robusto. Avverto che giova al vigore del suono il battere piuttosto la corda ne' punti C, 3C, che nel punto medio 2C: la maggior vicinanza degli appoggi rende la corda più resistente, e fa sì che essa acquisti una più viva palpitazione.

Conchiudo che la pressione della molla non introduce nella corda AB quei suoni, che antecedentemente non c'erano, ma cagiona l'unico effetto di rendere sensibili quelli, che erano già stati impressi, e ciò coll'estinguere i suoni più forti della corda intera, e delle maggiori parti aliquote.

XXII. Dalla fondamental proprietà, che una corda unitamente si vibra e tutta intera, e divisa in parti eguali, agevolmente deducesi la legge della comunicazione dei tremiti sonori da una corda all'altra. Egli è di uopo premettere, che non si comunicano sensibilmente altri tremiti che gli unisoni, o esattamente, o prossimamente. Per ottenere che passi una palpitazione notabile dall'una all'altra corda, ci vuole una forza continuamente applicata, la cui azione sia favorevole costantemente. Due corde unisone oscillano sempre a seconda, e non si contrastano mai. Non così succede in due corde, che molto dall'unisono si discostano; imperciocchè spesse volte mentre la corda agente oscilla, e spinge l'aria contro la paziente, questa reciproca, ed incontra perciò

resistenza

resistenza, ed allo opposto mentre la corda agente reciproca, la paziente oscilla, nè può essere da quella ajutata.

Date due corde, sono note le serie de' suoni prodotti dalle corde stesse, secondo che tremano intere, o divise in parti eguali. Quando i suoni delle due corde intere non si riferiscano in una proporzione assimetra, le predette corde avranno dei suoni comuni. Ora questi suoni comuni, e spezialmente il più grave proprio di una parte aliquota più lunga, e conseguentemente più flessibile, da una corda all' altra faran passaggio. Il canone generale vuol essere illustrato con un esempio. Ci siano due corde della stessa materia, egualmente grosse, e tese con pari forza, le cui lunghezze 1, $\frac{2}{3}$. Posto che i suoni della prima si esprimano colla serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c., quelli della seconda verranno contrassegnati dalla progressione $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{9}{2}$, $\frac{12}{2} = 6$, $\frac{15}{2}$, $\frac{18}{2} = 9$, &c. Si osservino comuni alle due corde i suoni 3, 6, 9, &c., e si cavi la conseguenza, che tali suoni, e principalmente il più grave 3 proprio della terza parte della corda 1, e della metà della corda $\frac{2}{3}$, dalla corda agente alla paziente si apriranno la strada. Ella è la corda 1, che oscilla divisa in tre parti uguali, che fa sonare la corda $\frac{2}{3}$ in due porzioni eguali partita: e così parimente la corda $\frac{2}{3}$, ~~divisa per metà~~ che si vibra divisa per metà, partecipa il suono alla corda 1 in tre parti eguali distribuita. Quindi parlando con precisione dobbiamo dire, che le tre corde $\frac{1}{3}$ fanno sonare le due corde $\frac{1}{3}$, o a rovescio.

XXIII. Fra le molte sperienze, colle quali

quali si può confermare la legge da me stabilita, fu scelta dalla seguente, che ha relazione all'esempio or ora recato. La corda BA (Fig. 21.), la cui lunghezza = $\frac{5}{3}$, dividasi in cinque parti eguali BS, S2S; 2S3S, 3S4S, 4SA. Al punto 2S sottopongasi lo scannello C2SD, e col corpo duro, e curvo 2S7 (io mi soglio servire della testa di un compasso) il quale tocchi la corda nello unico sito 2S, si prema essa corda di maniera che non possa far moto alcuno al di sopra dello scannello. Partita così la corda in due segmenti B2S = $\frac{2}{3}$, 2SA = 1, si faccia sonare per modo di esempio il primo, sonandolo colle unghie in uno de' punti C, 2C, che dividono per metà le porzioni eguali BS, S2S, ed ammortitone incontanente il suono col polpastrello del dito, si sentirà chiaramente a sonare il segmento 2SA non già intero, o diviso per metà, ma in tre parti eguali distribuito 2S3S, 3S4S, 4SA. Questo suono da me nell'addotto esempio contrassegnato pel numero 3 è il più grave fra quelli, che sono comuni ad ambo le corde B2S, 2SA, e quindi più vigoroso degli altri dalla corda agente alla paziente fa transito. Ho detto che la corda B2S si tocchi al tremito in uno de' punti C, 2C; perchè tali siti sono assai favorevoli alle vibrazioni della nostra corda in due porzioni uguali divisa. Per altro applicata l'unghia al punto più svantaggioso S, le due metà BS, S2S, come ho avvertito al numero XXI. concepiranno vibrazione, ma fiacca, la quale si comunicherà alle terze parti della corda 2SA.

XXIV. L'artifizio, ch'io espongo, serviva a far toccar con mano, che nel suono della corda 2SA non ha parte alcuna quello della corda intera B2S, ma che unicamente è cagionato dalle oscillazioni delle due metà BS, S2S. Cingasi il

sito

sito S con uno spago, e dopo averlo aggroppato, si recida lo spago stesso in vicinanza del gruppo. Questo spago ammorza il suono della corda intera B2S, e nulla o poco impedisce le vibrazioni delle due metà BS, S2S. Stimolata la corda al ventre in uno de' siti C, 2C, ed ammorzandolo poscia col polpastrello del dito, resterà il suono della terza parte della corda 2SA, che si udirà non meno forte di quello, che rende la corda stessa, mentre al punto S lo spago non è legato. Si inferisca per tanto, che le vibrazioni della corda intera B2S nulla influiscono nel suono della corda 2SA, che oscilla in tre parti eguali distribuita.

XXV. Difficilissima a prima vista sembra la spiegazione di una bellissima esperienza del celebre Signor Giuseppe Tartini. Stimolate coll'arco due corde del violino, i di cui suoni si esprimano con numeri fra loro primi, e purchè il più piccolo di questi numeri non sia eguale ad uno, si ode sempre in aria il nuovo suono contrassegnato dalla unità. Rendano per esempio due corde i suoni 3, 5, e si farà sentire in aria il suono 1, a cui i predetti suoni 3, 5 si riferiranno, quello in quinta sopra l'ottava, questo in terza maggiore sopra l'ottava duplicata. (a)

Immaginiamoci

---

(a) Quantunque il lodato Signor Tartini, il quale esprime i suoni non come è mio costume pe' numeri delle vibrazioni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. fatte in tempo eguale, ma per le loro durate 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, &c. affermi alla pag. 14 del suo Trattato di Musica, che si oda in aria il terzo suono $\frac{1}{2}$, nulladimeno avvisato da me col mezzo del P. Francescantonio Vallotti eccellente Maestro di cappella nel tempio di S. Antonio di Padova, che questo suono dovea pareggiare l'unità, scrive alla pag. 170. Il terzo suono

suono

# Schediasma IV.

Immaginiamoci tre corde BD, C, T (fig. 22.), la prima infinitamente lunga, e le altre due di lunghezza determinata. Si facciano sonare le due corde finite, ed in virtù dell'azione della corda C, vedrassi la corda indefinita BD divisa in porzioni eguali BS, SnS, &c., ciascuna delle quali sarà unisona alla corda C. Non altrimenti per opera della corda T oscillerà la corda BD distribuita in parti eguali B7, 7a7, a737, &c, che alla corda T risponderanno all'unisono. Le lunghezze delle parti BS, B7 della stessa corda stanno inversamente come i loro suoni unisoni a quelli delle corde C, T; e quindi espressi tali suoni pe' numeri $n$, $N$ fra loro primi, avremo $BS : B7 :: \frac{1}{n} : \frac{1}{N}$, e conseguentemente ponendo $BS = \frac{L}{n}$, sarà $B7 = \frac{L}{N}$. Se prenderò la lunghezza $BS = \frac{L}{n}$ tante volte BS, SnS, &c quante unità si contengono in $n$, e così parimente la lunghezza $B7 = \frac{L}{N}$ tante volte B7, 7a7,

a737

---

suono, che io dico unisono costantemente a $\frac{1}{n}$, quando i dati suoni siano in serie armonica, si può dubitare che sia unisono al tutto, o sia alla prima unità della serie. Di fatto la qualità di questo terzo suono essendo diversa dalla qualità del suono naturale della corda, questa diversità può cagionare equivoco ad onta del più squisito senso di udito, e di migliaja di prove. Facendo il Signor Serre menzione della sperienza del Signor Tartini nella sua Opera sopra i Principj dell'Armonia, riferisce che i terzi suoni prodotti dalle terze maggiori, e minori corrispondono all'ottava bassa con quelli del Signor Tartini.

a I 3 I., &c quante unità comprende il numero N, ne risulterà in ambo i casi la stessa lunghezza BA = L. Egli è facile da scoprire, che il punto A, non meno che il punto B, sta immobile in riguardo alle vibrazioni e delle parti BS, e delle parti BI, terminando in esso due porzioni di varia grandezza n SA, e IA. Fra i punti B, A non si può dare altra coppia di nodi, che nello stesso punto si uniscano. Per ottener questa unione, farebbe di uopo che i numeri n, N avessero una comune misura k maggiore dell'unità, di modo che $\frac{n}{k}$, $\frac{N}{k}$ fossero numeri interi minori di n, N. In tale ipotesi moltiplicando $BS = \frac{L}{n}$ per $\frac{n}{k}$; $BI = \frac{L}{N}$ per $\frac{N}{k}$, vi si presenterebbe la medesima lontananza dal punto B $\frac{L}{k}$ minore di $AB = L$, in cui seguirebbe dei due punti stabili l'accoppiamento: ma i numeri n, N, che si suppongono fra loro primi, non hanno comune misura maggiore dell'unità; dunque non può darsi sito alcuno fra i punti B, A, nel quale succeda l'union dei due nodi. Perciò non vi è punto nella corda BA, dentro gli estremi B, A; che non si vibri; imperciocchè quei punti S, a S, che dovrebbero rimaner immobili rispettivamente alla oscillazioni delle parti BS, SaS, &c. si tremano per cagion della vibrazione delle parti BI, IaI, &c.: e così parimente quei punti I, a I, &c, che i tremiti delle porzioni BI, IaI, &c. renderebbero stabili, si muovono per motivo della oscillazioni delle parti AS, SaS, &c.

La palpitazione di qualunque punto medio fra B, ed A fa sì, che la corda intera BA concepisca vibrazione, e rende quel suono, chi è

che è conveniente alla lunghezza BA in Cerchiamo il valore di questo suono, e vediamo se vada di accordo con quello, che la esperienza del Signor Tartini ci somministra. I suoni di due parti BS, BA della stessa corda BD serbano la ragione reciproca della lunghezza BS, BA. Il determine quarto proporzionale adunque di $\frac{1}{BS} = \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{BA} = \frac{1}{\alpha}$, e di un suono della porzione BS, si eguaglierà al suono della corda BA; ma il detto quarto termine proporzionale pareggia l'unità; dunque per questa si esprime il suono della corda AB, e tale si è il suono, che si ode in aria l'esperimento del Signor Giuseppe Tartini.

XXVI. Abbiamo veduto al numero XVIII. che le corde d'aria apportatrici dei suoni si debbono considerare infinitamente lunghe. La corda BD è uno di quei raggi sonori, che vengono dal violino al mio orecchio, lungo il quale si segnano le porzioni BS, SaS, &c BT, TaT, &c. unisone alle corde e, T del violino. Comincia essa corda BD da quel punto B, in cui incontrandosi i due raggi eB, TB provenienti dalle due corde e, T del violino, sono obbligati dall'urto ad incamminarsi di conserva per la media direzione BD. Dallo unirsi poi due nodi nel punto A, e dallo schivarsi tutti gli altri nodi medj fra B, ed A ne nasce il suono 1 della corda BA, che si sente in aria, siccome è stato da me spiegato. Si avverta che l'accoppiamento dei nodi in un solo punto si replica alle distanze 2BA, 3BA, &c. dal punto B; laonde la corda BD viene divisa nelle tre parti di varia misura B9, BS, BA, che rendono i suoni N, n e 1. Posto n = 1; non nascerebbe in aria nuovo suono,

e la

e la corda BD oscillerebbe divisa nelle sole due parti BI, BS = BA unisone alla corda 7, e del violino. In fatti le ragioni 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, ec. non producono il terzo suono.

XXVII. Conchiudo colli avvertenza, che si spiegano cogli stessi principj due sperienze una reciproca dell'altra, cioè che toccata una corda si sentono i suoni delle sue parti aliquote, ed all'opposto stimolate al suono due parti aliquote si ode il suono della più piccola corda intera, che possa da esse parti essere misurata. Incurvata la corda tutta, si incurvano altresì le sue parti aliquote, e fanno le loro particolari oscillazioni. Non altrimenti incurvate due parti aliquote, si incurva altresì la corda intera, minima tutta da esse misurata, e conseguentemente si pone in oscillazione. Due suoni del violino fanno nascere in aria un suono sensibile, perchè tali suoni sono assai forti. Surrogato al violino un gravicembalo, un mandolino, il suono in aria riesce talmente fiacco, che non fa impression sicura nell'orecchio.

XXVIII. Procura il dottissimo Signor Jacopo Ermanno negli Atti di Lipsia dell'anno 1716. di trovare il tempo periodico di una corda sonora, che si vibra, senza prima indagare la curva, alla quale si adatta la predetta corda oscillando; ed ecco il metodo, di cui si serve.

Quando la corda AB (Fig. 14.) tesa dalla potenza P acquista la curvatura A7B, AfB, la sua lunghezza AB è accresciuta per le quantità A7B − AB, AfB − AB; distensioni che, siccome minime, sono proporzionali alle forze, che le producono. Quindi se (Fig. 14. e 23.) sia AB = DP; A7B = HP, AfB = QP, e la retta HN normale ad HP esponga la forza producente la distensione HD = A7B − AB,

dinoterà

dinoterà $eO$ parallela ad $HN$ la forza, che cagiona l'allungamento $eD = AfB - AB$.

Conducasi parallela ad $HN$ la linea $DK = P$ potenza, che alla nostra corda somministra quel grado di tensione, o di elasticità, che ha in $ACB$, e segnata $PKM$, a cui il Signor Ermanno suppone equidistante $DN$, si scopriranno $HM$, $ed$ uguali ai gradi assoluti di tensione, che competono alla corda nei siti $ADB$, $AfB$, e non altrimenti; le ordinate del trapezio $HDKM$ esporranno le tensioni assolute nelle corrispondenti posizioni della corda. Ora queste ordinate non possono uguagliarsi alle forze, che obbligano la corda ad accorciarsi; imperciocché giunta nel sito $ACB$, ove la sua energia $= P$, non può ulteriormente scemar di lunghezza. Le sole $HN$, $eO$, &c dinotano le forze, che l'accorciamento della corda producono. Ciò posto immaginiamoci un corpo $H$, la cui massa si uguagli a quella della corda $AB$, che venga spinto per lo spazio $HD$ dalla scala di forze $HDN$, e siano $AB = DP = L$, $DK = P$, la massa del mobile $H = M$, $DH = a$, $De = x$, la velocità acquistata nella discesa per $He$ $= u$, il suo elemento $= du$, e lo elemento del tempo, nel quale lo spazietto $ee$ si percorre, $= dt$. Avremo per la similitudine dei triangoli $PDK$, $DeO$ $PD = L : DK = P :: De = x : eO$ $= \frac{Px}{L}$. Egli è noto, che $eO \cdot dt = \frac{Px\,dt}{L} = M\,du$, e moltiplicando il tutto per $Lu$, $Px\,u\,dt = ML\,u\,du$: ma $u\,dt = -dx$; dunque $-Px\,dx = ML\,u\,du$, e sommando, $a^2 - x^2 = \frac{ML\,u^2}{P}$, e conseguentemente $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{\frac{ML}{P}} \cdot u$. Pongo in vece di $u$ il suo valore $-\frac{dx}{dt}$, onde s'abbia $dt = \sqrt{\frac{ML}{P}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

e fatta

e fatta l'integrazione, $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} \int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
Descritto frattanto col centro D, e col raggio HD il quadrante HQSD, e continuata OQ sino in Q, avremo $\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{HQ}{HD}$, e perciò
$t = \sqrt{\frac{ML}{P}} \cdot \frac{HQ}{HD}$, e quando il mobile è pervenuto ~~al punto~~ al punto D, $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} \cdot \frac{HQS}{HD}$.
Sia il quadrante HQS al raggio HD come $b : c$, e ne risulterà $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} \cdot \frac{b}{c}$, misura del tempo, che impiega il mobile a scorrere lo intero spazio $HD = a$.

Si faccia la riflessione, che essendo il mobile H, e la corda AB forniti della stessa massa, stimolati dalla stessa scala di forze NHD, ed accorciandosi la detta corda pel medesimo spazio, per cui si move il corpo, spenderà essa nello accorciarsi per lo spazio $HD = AZB - AB = a$, o sia nel fare una mezza vibrazione il tempo $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} \cdot \frac{b}{c}$, che consuma il corpo nel viaggiare per lo spazio HD; e quindi a compiere una intera vibrazione ci vorrà il tempo $t = \frac{2b}{c}\sqrt{\frac{ML}{P}}$.

XXIX. Per paragonare il moto della nostra corda con quello dei pendoli a cicloide, sia $h$ la lunghezza di un pendolo, che fa una vibrazione per secondo, il tempo della quale si espone per $\frac{2b}{c}\sqrt{h}$. Facciasi adunque $t : \frac{2b}{c}\sqrt{\frac{ML}{P}} :: 1 : \frac{2b}{c}\sqrt{h}$, e scopriremo
$t = \sqrt{\frac{ML}{Ph}}$, formola del tempo espresso in secondi di una vibrazione della corda AB, che non si accorda con quella, che è stata da me determinata nel numero XV.

XXX.

XXX. La diversità delle mentovate due formole, ed il nome celebre del Signor Ermanno mi hanno obbligato ad esaminare posatamente la sua soluzione, la quale certamente è per più titoli difettosa.

E primieramente prende egli sbaglio nel mettere a computo l'azione della elasticità della corda AZB, la quale non viene rappresentata dal solo triangolo $HDN = \frac{Pa^2}{nL}$, come vuole il Signor Ermanno, ma bensì dal detto triangolo più il rettangolo $KD \cdot DH = Pa$, cioè a dire dalla quantità $Pa + \frac{Pa^2}{nL}$, la quale supponendosi a minima si adegua a $Pa$. In fatti quando la corda dalla positura AZB passa alla linea retta, segue l'accorciamento $AZB - AB = a$, e la sua elasticità adequatamente costante, ed eguale a P si applica allo spazio $AZB - AB = a$, ed esercita l'azione $Pa$. Nè qui c'è alcuna reazione, che si debba sottrarre, supponendosi la nostra corda, che è tesa dalla forza P, raccomandata a due chiodi immobili A, B. Se ci fosse una corda verticale, la cui lunghezza AZB, dalla quale pendesse il peso $P + \frac{Pa}{L}$, che colla sua elasticità formasse equilibrio, levato il peso $\frac{Pa}{L}$, ed avendo la corda tirato in alto il grave P per lo spazio $= a$, la forza elastica avrebbe esercitata l'azione $Pa + \frac{Pa^2}{nL}$, da cui dovendosi sottrarre la reazione $Pa$ del peso P, resterebbe l'azione $\frac{Pa^2}{nL}$. Ma come dissi nel nostro caso della corda a due chiodi attaccata non si dà reazione veruna, supponendosi i chiodi immobili; laonde va introdotta nel calcolo l'azione $Pa$, e non la $\frac{Pa^2}{L}$. Nè punto conchiude la ragione addotta dal Signor Ermanno, che

intanto

intrato si deve tener conto della sola differenza $\frac{Pa}{L}$ fra le elasticità della corda $P + \frac{Pa}{L}$, $P$ nei siti $A7B$, $ACB$, inquanto giunta la corda in $ACB$, la sua elasticità $P$ non può agire; imperciocchè questa non impedisca, che mentre la corda si accorcia per lo spazio $A7B - AB = a$, l'elasticità $P$ non eserciti l'azione $Pa$, a cui non si oppongono i chiodi, i quali solamente frastornano un'azione ulteriore.

XXXI. In secondo luogo suppone non rettamente il nostro insigne Autore parallele le due linee $PM$, $DN$. Ho io dimostrato nello Schediasma I. che nell'allungamento di una corda c'entra l'elemento della rigidità naturale, ch'è quella ripugnanza, che ha la corda a lasciarsi distendere, anche prima che le venga applicata veruna forza tendente. Questa rigidità naturale corrispondente alla lunghezza $PD = L$, ed alla forza stirante $DK = P$ si chiami $r$, e posta la forza minima $HN = p$, mi è riuscito di scoprire l'allungamento infinitesimo $DH = a = \frac{Lp}{r+P}$, il quale se le linee $PM$, $DN$ fossero parallele, dovrebbe uguagliarsi alla grandezza $\frac{Lp}{P}$.

Quindi il corpo $H = M$ considerato dal Signor Ermanno, che fosse spinto per lo spazio $HD$ dalla scala di forze $NHD$, non si moverebbe nel tempo da lui determinato; ma il vero tempo espresso in secondi di una sua vibrazione sarebbe $= \frac{\sqrt{ML}}{\sqrt{r+P.h}}$; formola totalmente discorde da quella, che conviene alle vibrazioni trasversali delle corde sonore, i tempi delle quali (e ne vedremo il perchè al numero XXXXIII.) non vengono punto alterati dalle rigidità naturali.

Ma prescindendo anche da ciò, il corpo $H$, la cui massa $M$ uguale a quella della corda, non può mai essere ad essa isocrono; perchè tutte le

le particole di quella si muovono per lo spazio $HD = a$; il che non si adempie degli elementi di questa. L'elemento della semicorda $AZ$ vicino al punto $Z$ con moto di accorciamento viaggia per lo spazio $\frac{1}{2}a$, e gli altri elementi, esempigrazia $De$, scorrono spazj sempre minori quanto più si accostano al punto $B$. Lo stesso dicasi dell'altra semicorda $AZ$.

XXXII. Si ponga mente in terzo luogo, che il vero moto della corda $AZB$ si è il trasversale per gli spazj $ZC$, $DH$, &c, essendo come osserveremo al numero XXXIII. il moto di accorciamento relativamente infinitesimo ne trascurabile. Perciò due conseguenze voglion dedursi, cioè che agendo l'elasticità della corda per lo spazio $AZB - AB = a$; e movendosi la sua massa per ispazj continuamente diversi $ZC$, $DH$, &c.; non poteva il Signor Ermanno senza paralogismo valersi della formola Cartesiana $Pdt = Mdu$, che non si verifica, salvo in que' casi, ne' quali la forza agisca, ed il corpo si muove per ispazj eguali. In oltre dipendendo gli spazj $ZC$, $DH$, &c., per cui si fa il vero moto, dalla curva $AZB$, alla quale si adatta la corda oscillando, egli è impossibile determinare il tempo di una vibrazione indipendentemente dalla curva mentovata.

XXXIII. Ora passo ad esaminare la mia soluzione, e dimostro che tacitamente ho in essa computata la vera azione $Pa$; di modo che quando la corda è giunta alla linea retta $ACB$ (fig. 15) ha fatto acquisto di un aggregato di forze vive uguale alla detta azione. Abbiamo l'elemento $De = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx + \frac{dy^2}{2dx}$ stante la supposizione che $dy$ sia minima rispettivamente a $dx$: ma per l'equazione della curva $AZB$ $dx = \frac{cL\,dy}{2nb\sqrt{c^2 - y^2}}$; dunque $ds = dx + \frac{nb\,dy\sqrt{c^2 - y^2}}{cL}$,

ad

ed integrando $s = x + \frac{nb}{c\alpha}\int\sqrt{c^2-y^2}.\,dy$. Tralasciata la costante, perchè in questo caso non ci va aggiunta. Riflettasi essere $\int\sqrt{c^2-y^2}.\,dy$ uguale all'aja circolare CgQf, e quindi scoprirassi $s = x + \frac{nb}{c\alpha}.\,CgQf$: ma quando $BH = x = BA = \alpha$, l'aja CgQf è divenuta uguale al semicircolo $fQ7nff = bc$ moltiplicato per n (fig. 15. 16. 17. ecc.); dunque in tal circostanza $s = A7B = AB + \frac{n^2b^2}{\alpha}$, e l'azione $Pa = \frac{Pn^2b^2}{\alpha}$.

E qui noti meco chi legge, che supponendosi minimi del primo ordine il raggio $7C = c$, il quadrante $7Qf = b$, e le ordinate $DH = y$, la grandezza $A7B - AB = a = \frac{n^2b^2}{\alpha}$ appartiene al secondo grado degli infinitesimi; e perciò il moto di accorciamento della porzione di corda B7 per lo spazio $\frac{a}{2n}$ è trascurabile rispettivamente a quello per le ordinate 7C, DH, ecc., conforme al numero XXXII. avea promesso di far vedere.

XXXIV. Al punto 7 rimanga da scorrere lo spazio $gC = kc$, ed al punto D lo spazio corrispondente $ky$, onde conforme si raccoglie dal numero XIV. la velocità del punto 7 sia $= 2nb\sqrt{\frac{P}{\alpha M}.\,1-k^2}$, e la corrispondente del punto $D = \frac{2nby}{c}\sqrt{\frac{P}{\alpha M}.\,1-k^2}$. Il semiquadrato di quest'ultima velocità si scoprirà $= \frac{2n^2b^2y^2P\,\overline{1-k^2}}{c^2\alpha M}$, e la forza viva dell'elemento Dx, la cui massa $\frac{M\,dx}{\alpha}$, $= \frac{2n^2b^2y^2P\,dx\,.\,\overline{1-k^2}}{c^2\alpha^2}$. Pongo in cambio di $dx$ il suo valore $\frac{kc\alpha}{2nkb}.\frac{k\,dy}{\sqrt{k^2c^2-k^2y^2}} = \frac{c\alpha}{2nb}.\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e trovo la detta forza viva $= \overline{1-k^2}.\frac{nbP}{c\alpha}.\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e conseguentemente quella della porzione BD

dalla

della nostra corda $= \overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{c\alpha}\int\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$. Avverto essere $g\alpha = \sqrt{c^2-y^2}$, e la sua differenza negativa $\alpha k = \frac{ydy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e perciò tirata la linea $\alpha y$, $Yy$ parallela ad $ZC$; $y\cdot\frac{ydy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ pareggia l'aja elementare $g\alpha Yy$. Avremo dunque $\overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{c\alpha}\cdot\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ $= \overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{c\alpha}\cdot g\alpha Yy$; e per conseguenza la forza viva della porzione di corda $AD$ $= \overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{c\alpha}\int\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}} = \overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{c\alpha}\cdot\alpha fg$. Fatta l'osservazione, che quando $BH = BA = \alpha$, l'aja $\alpha fg = n\cdot afZ\alpha faf = nbc$, ci accorgeremo essere la forza viva della intera corda, allora che il punto $Z$ è pervenuto in $g$, $= \overline{1-k^2}\cdot\frac{n^2b^2P}{\alpha}$. L'allungamento della corda nella positura $AZB$ è $\frac{n^2b^2}{\alpha}$, e nella $AgB$ $= \frac{n^2k^2b^2}{\alpha}$, e quindi passando da un sito all'altro si è accorciata per la quantità $\overline{1-k^2}\cdot\frac{n^2b^2}{\alpha}$, e l'elasticità della corda ha esercitata l'azione $P\cdot\overline{1-k^2}\cdot\frac{n^2b^2}{\alpha}$, a cui si eguaglia la forza viva della corda nel sito $AgB$. Giunta poscia la corda alla linea retta $ACB$, abbiamo $k=0$, e la forza viva $= \frac{Pn^2b^2}{\alpha}$ di essa corda pareggia l'azione $Pa = \frac{Pn^2b^2}{\alpha}$ esercitata dalla energia elastica $P$ per lo spazio $AZB - AB$ $= a = \frac{n^2b^2}{\alpha}$; il che ec.

XXXV. Le cose dette mettono in chiaro lume l'aggiustatezza della mia soluzione, e quanto rettamente abbia determinata la curva $AZB$; posta la quale (oltrechè l'aggregato della forza viva acquistata dagli elementi della corda è sempre uguale all'azione della elasticità di essa corda) derivano dalla tensione adequatamente costante, ed uguale a $P$ della corda medesima tali forze

acceleratrici

accelerazioni; che sono proporzionali agli spazj da percorrersi FC, DH, &c.; condizione indispensabilmente necessaria, acciocchè tutti i punti della corda giungano alla linea retta ACB nello stesso momento.

XXXVI. Aggiungo una riflessione, che servirà a far vie più toccare con mano la verità della mia soluzione. Le formole nei numeri XXXIII. e XXXIV. ritrovate mi insegnano essere $BD - BH = \frac{nb}{cL} \cdot CgRf = \frac{nb}{cL} \cdot Rfg + \frac{nb}{cL} \cdot CgRg$, e la forza viva del pezzo di corda BD, quando è giunto alla linea retta AB, $P \cdot \frac{nb}{cL} \cdot Rfg$. Dovendosi a questa forza viva eguagliare l'azione, che l'ha generata, cioè a dire il prodotto della elasticità P nell'accorciamento della corda AD, ne risulta il detto accorciamento $= \frac{nb}{cL} \cdot Rfg$. Conciossiachè la curva BD supera in lunghezza l'assissa BH più di quello essa corda si accorcj per la quantità $\frac{nb}{cL} \cdot CgRg$; egli è segno, che il punto D non viaggia per lo ordinata DH, ma bensì per la curva Dh, la quale è una parabola Apolloniana, che taglia la lineetta $hH = \frac{nb}{cL} \cdot CgRg$, onde si abbia $BD - BH - Hh = \frac{nb}{cL} \cdot Rfg$, accorciamento della corda AD.
Perchè $Cg = y$, e $gR = \sqrt{c^2 - y^2}$, averemo $CgRg = y\sqrt{c^2-y^2}$, ed $hH = \frac{nb}{cL} \cdot CgRg = \frac{nby}{cL}\sqrt{c^2-y^2}$.
Dividendo il quadrato $y^2$ dell'ordinata $HD = y$ per l'assissa $Hh = \frac{nby}{cL}\sqrt{c^2-y^2}$, scopriremo il parametro della parabola $= \frac{cLy}{nb\sqrt{c^2-y^2}}$, che si manterrà costante in qualunque positura AfB (Fig. 14.) si trovi la nostra corda; di modo che Dh (Fig. 15.) sarà sempre la stessa parabola. In fatti sia (Fig. 14.) $Cf = kc$, $Hd = ky$, e non si altererà il valore di esso parametro $= \frac{kcLky}{nkb\sqrt{k^2c^2-k^2y^2}} = \frac{cLy}{nb\sqrt{c^2-y^2}}$.

La

La linea Hh (fig. 15.) è nulla in due circostanze o quando $y=0$, o quando $y=e$. La sua massima grandezza rispettivamente ad $y$ corrisponde ad $y=\frac{e}{\infty}$, nel qual caso $Hh=\frac{nby}{L}$: ed anche in questo incontro più svantaggioso la linetta Hh è minima in riguardo ad HD. La direzione in D della curva Dh è la stessa con quella del raggio DI osculante la curva AZDB nel punto D; il qual raggio taglia Hi doppia di Hh, e per conseguenza infinitesima rispettivamente ad HD. Inoltrandoci dal punto D al punto h, gli elementi della curva Dh passano per tutti i gradi dalla direzione Di alla DH normale ad AB. Quindi essendo Dh = DH adequatamente, e l'angolo iDH infinitesimo, rettamente nella mia soluzione ho confuse in una sola le lunghezze, e le direzioni delle linee Dh, DH.

XXXVII. Riesce agevole presentemente il dare una nuova soluzione del problema del numero II. ponendo in opera il metodo delle azioni. Quando la porzione di corda BD è pervenuta nel sito Bh, l'elasticità adequatamente costante, ed uguale a P. di essa corda ha replicati i suoi impulsi per tutti gli elementi dello spazio BD − BH − Hh, che si eguaglia all'accorciamento della corda predetta. La similitudine dei triangoli DGe, DHi mi somministra l'analogia DG : Ge :: DH : Hi

$$dx : dy :: y : \frac{ydy}{dx},$$

che determina $Hi=\frac{ydy}{dx}$, e conseguentemente la sua metà $\frac{1}{2}Hi$, come pocostante provava $=Hh=\frac{ydy}{2dx}$. Avremo dunque $BD-BH-Hh$ $=s-x-\frac{ydy}{2dx}$, e l'azione della elasticità della corda BD giunta in Bh eguale a $P.\overline{s-x-\frac{ydy}{2dx}}$. Presa la differenza assumendo $dx$ come costante, mi si presenta l'espressione $P.\overline{ds-dx-\frac{yddy}{2dx}-\frac{dy^2}{2dx}}$;

e

e ponendo in vece di $ds$ il suo valore $dx + \frac{dy^2}{2dx}$,

$p.\ dx + \frac{dy^2}{2dx} - dx - \frac{yddy}{2dx} - \frac{dy^2}{2dx} = - \frac{Pyddy}{2dx}$, infinitesimo incremento di azione, che si impiega ad imprimere forza viva nell'elemento $HK$ della corda $BH$, la massa del quale $= \frac{Mdx}{L}$.

XXXVIII. Mettendo $Hh = \frac{1}{2} Hi$, ho tacitamente supposto che la curva $Dh$ sia una parabola Apolloniana, la qual verità ha bisogno di essere dimostrata. Dalle cose spiegate al numero X. si raccoglie, che se in qualunque positura $AfB$ (fig. 14.) della corda $AZB$ le forze acceleratrici hanno da stare come le ordinate $fC$, $dH$; chiamate $ZC = c$, $DH = y$, debbono essere $fC = kc$, $dH = ky$. Avremo dunque $y : ky :: dy : kdy$, e quindi la differenza $kdy$ di qualsivoglia ordinata $dH$ sarà come l'ordinata medesima. Ora giacchè a $DH = y$ corrisponde la suttangente (fig. 15.) $Hi = \frac{ydy}{dx}$ della curva $Dh$, alla ordinata $dH$ (fig. 14.) si riferirà la suttangente $= \frac{ky.kdy}{dx}$, e sostituendo in vece di $dy$, $kdy$ i termini proporzionali $y$, $ky$, le dette suttangenti si riguarderanno nella ragione di $y^2 : k^2y^2$, o sia dei quadrati delle ordinate $DH$, $dH$: ma questa è proprietà della parabola Apolloniana; dunque tale è la curva $Dh$ (fig. 15.), e perciò $Hh = \frac{1}{2} Hi$.

XXXIX. Conciossiachè i punti $Z$, $D$ hanno da passare gli spazj $ZC$, $Dh$, ovvero $DH$ nello stesso tempo, e colla legge di accelerazione di un pendolo a cicloide, le velocità nei punti $C$, $h$ dovranno corrispondersi nella ragione di $ZC : DH$; e quindi la velocità nel punto $h$ si esporrà per $Ay$ ($A$ è una costante da determinarsi a suo tempo) ed il semiquadrato della stessa per $\frac{A^2y^2}{2}$, onde ne risulti la forza viva dell'elemento $HK = \frac{Mdx}{L} \cdot \frac{A^2y^2}{2}$: ma questa forza viva dee pareggiare l'azione, che la produce; dunque

siamo

siamo pervenuti alla equazione $-\frac{Py\,ddy}{2dx} = \frac{MA^2y^2dx}{2L}$, che si riduce alla seguente $-\frac{LP\,ddy}{y} = MA^2dx^2$.

XXXX. Acciocchè svaniscano le seconde differenze, pongo $dy = Qdx$, ed ho nuovamente differenziando $ddy = dQ\,dx$. Adempiuta la sostituzione del suo valore in cambio di $ddy$, trovo $-\frac{LP\,dQ\,dx}{y} = MA^2dx^2$, o sia $-\frac{LP\,dQ}{y} = MA^2dx$, e perchè $dx = \frac{dy}{Q}$, $-\frac{LP\,dQ}{y} = \frac{MA^2dy}{Q}$, e levando le divisioni, $-LPQ\,dQ = MA^2y\,dy$, e finalmente integrando, $LP.\overline{G^2-Q^2} = MA^2y^2$.

XXXXI. Si determina la costante G riflettendo, che quando HD = y giunge al massimo valore CD = c, diviene $\frac{dy}{dx} = Q = 0$. Avremo dunque $LPG^2 = MA^2c^2$, e per conseguenza $G^2 = \frac{MA^2c^2}{LP}$, e fatta la surrogazione di questo valore, $LP.\overline{\frac{MA^2c^2}{LP} - Q^2} = MA^2y^2$, e pure $MA^2.\overline{c^2-y^2} = LPQ^2 = \frac{LP\,dy^2}{dx^2}$, ed effettuate le necessarie operazioni, $dx = \frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}}.\frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$. Dalla integrazione ne nasce $x = \frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}}.\int\frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$. Non aggiungo costante, perchè sendo $\int\frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ eguale all'arco circolare fQ, ad x = 0 corrisponde fQ = 0.

XXXXII. Resta da stabilire il valore della costante A. Ho già notato essere nel punto B y = 0, in cui è parimente fQ = 0. La detta ordinata frattanto deve altresì esser nulla nel punto A; il che interverrà quando sia lo arco fQ o eguale ad un semicircolo fQdaf = 2b (fig. 15.), o a due semicircoli (fig. 16.), o a tre (fig. 17.) &c., o generalmente ad n.2b, essendo n eguale a qualsivoglia numero intero positivo. Ripigliata per mano la formola

$x = \frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}} \cdot \int \frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ si faccia in essa $x = L$, $\int \frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ $= 2nb$, e ne risulterà $L = \frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}} \cdot 2nb$; e fatte le necessarie operazioni $A^2 = \frac{4n^2b^2P}{c^2LM}$. Pongasi in luogo di $A^2$ questo valore nella nostra formola, e si scoprirà finalmente $x = \frac{cL}{2nb} \int \frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, conforme abbiamo trovato al numero IV.

XXXXIII. Ho affermato al numero XXXI. che le rigidità naturali $r$ delle corde sonore non alterano punto i tempi delle minime vibrazioni trasversali. Si applichi al punto medio C (fig. 24.) della corda AB con direzione ad essa normale la forza $f$, che cagioni la saetta $CZ = s$. Nello Schediasma III. mi è riuscito di dimostrare $f = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3 + \frac{1}{2}Ls^2} = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3}$ posta $s$ minima. Se la nostra corda fosse priva di naturale rigidità, per ottenere la saetta $CZ = s$ ci vorrebbe la forza $\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}$, ed essendo fornita essa corda della rigidità $r$, si richiede la forza $\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3}$, le quali forze sono adequatamente uguali, consistendo la loro differenza in una quantità infinitesima del terzo grado.

Si ponga $ZB = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l$, e $P+p$ sia la forza, che stira direttamente la semicorda $ZB$. Per le cose dimostrate nello Schediasma poco fa citato avremo $\frac{2P+2p}{\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}l} \cdot s = f$, $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l = \sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}$. Sostituisco nella prima formola in vece di $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l$ il suo valore somministratomi dalla seconda, e trovo $\frac{2P+2p \cdot s}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}} = f$. Da questa espressione, e dalla formola sovrapposta $f = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{2}L \cdot \frac{1}{4}L^2+s^2}$ nasce l'equazione

$$\frac{2P+2p \cdot s}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}} = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{2}L \cdot \frac{1}{4}L^2+s^2},$$ da cui si raccoglie

$$P+p = \frac{P}{\frac{1}{2}L}\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2} + \frac{rs^2}{L\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}}$$ : ma $\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2} = \frac{1}{2}L + \frac{s^2}{L}$; dunque $P+p = P + \frac{Ps^2}{\frac{1}{2}L^2} + \frac{rs^2}{\frac{1}{2}L^2+s^2}$, o

sia

sia $p = \frac{2P+2V}{L^2} \cdot s^2$, aumento di tensione, che la forza $f$ cagiona nella corda $A\gamma B$.

Se la corda è priva di naturale rigidità, la forza $f = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}$ produce lo accrescimento di tensione $p = \frac{2Ps^2}{L^2}$: che se la corda, come in fatti interviene nelle corde fisiche, è fornita di rigidità, la forza $f = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{Vs^3}{\frac{1}{8}L^3}$ fa giungere il detto accrescimento alla grandezza $\frac{2P+2V}{L^2} \cdot s^2$, che può corrispondere a $\frac{2Ps^2}{L^2}$ in qualunque finita proporzione di maggiore inegualità, secondo il valore della rigidità $V$. Una esperienza registrata nel mentovato Schediasma III. ci istruisce, che la rigidità di una corda di ottone tesa dalla forza $P =$ once 140. ascendeva ad once 24054. e perciò rispettivamente ad essa corda $\frac{2P+2V}{L^2} \cdot s^2 : \frac{2Ps^2}{L^2} :: 24194 : 140$, cioè prossimamente come 173 : 1.

Ella è cosa notabile, che due forze adeguatamente uguali cagionino tanta diversità nello aumento della tensione: ma questa circostanza appunto, che la differenza di aumento di tensione, nascente dal vario valore della rigidità naturale, sia prodotta da forze trasversali pari adeguatamente, ci guida alla conseguenza, che non nascendo computabile mutazione nella forza viva, e nella velocità, i tempi delle minime oscillazioni dalla rigidità della nostra corda, la cui massa fosse tutta raccolta nel punto $\gamma$, non restino punto alterati. Ho supposto lo intera massa unita nel punto $\gamma$, a cagione che una corda fisica oscillando non mantiene la figura triangolare $A\gamma B$, ma si adatta alla curva $A\gamma\Delta B$ (fig. 15.) da me determinata, conforme ho fatto vedere ai numeri XI. e XII.

XXXXIV. In simil guisa nella corda $A\gamma\Delta B$, in cui la saetta $C\gamma = c$ sia sempre costante, ella è trascurabile la diversità della forza viva, e della velocità di qualsivoglia elemento $\Delta e$, traente lo origine dal

dal

> 65
nuér
anni

dal vario valore della rigidità. E voglia il vero; giacchè $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{1}{4}L^2 + s^2} = \frac{1}{2}L + \frac{s^2}{L}$, ne segue essere $f = \frac{2s^2}{L}$; e ponendo $s = c$, $f = \frac{2c^2}{L}$ = lo allungamento della corda AEDB (Fig. 15.) lo abbiamo trovato eguale ad $\frac{nb^2}{L}$. Facciasi

$\frac{2c^2}{L} : \frac{nb^2}{L} :: \frac{\overline{2P+2v}\cdot c^2}{L^2} : \frac{nb^2\cdot\overline{P+v}}{L^2}$, ed il quarto termine esprimerà lo accrescimento di tensione, che si richiede per produrre lo allungamento $\frac{nb^2}{L}$. Quindi la totale elasticità della corda nella positura AEDB $= P + \frac{nb^2\cdot\overline{P+v}}{L^2}$, la quale operando per lo spazio $\frac{nb^2}{L}$ esercita la azione $\frac{nb^2P}{L} + \frac{n^2b^4\cdot\overline{P+v}}{2L^2}$, a cui si agguaglia la forza viva della corda medesima: ma questa è sempre adequatamente uguale ad $\frac{nb^2P}{L}$, qualunque valore o nullo, o finito si assegni alla rigidità $v$, e da essa forza viva dipendono le velocità dei punti E, D, &c. della corda; dunque nella velocità dei nominati punti non nasce computabile alterazione; e perciò la rigidità $v$ nulla influisca ne' tempi delle minime vibrazioni.

XXXXV. Se tal uno trovasse che ridire sopra la mia soluzione, asserendo ch'essa serve non per le finite, ma soltanto per le infinitesime vibrazioni delle corde sonore; soggiungerei che quando si passa dal matematico al fisico, i minimi fisici stanno in luogo dei geometrici infinitesimi. La mia soluzione adunque si adatta alle minime fisiche oscillazioni, e di tal fatta si debbono riputar tutte quelle accettate dalla Musica, che o più ristrette, o più dilatate conservano sempre lo stesso tuono, conforme la mentovata soluzione richiede. Ed in fatti tanto è giusta la mia soluzione, quanto che da essa si raccolgono tutti que' fenomeni, che nelle corde fisiche si sperimentano, fra i quali di due soli molto importanti terrò discorso. Mi insegna la stessa, che una corda non può oscillare salvo che intera, o divisa in parti eguali, nè rendere se non se i suoni espressi dalla serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. e le corde fisiche si sottomettono a questa legge,

dandoci

dandoci esempigrazia la tromba marina solamente i descritti suoni, esclusi gli altri tutti. In oltre dalla mia soluzione deducesi, che nei tempi delle vibrazioni delle corde non ha luogo la loro naturale rigidità, e dalla esperienza raccolgo, che due corde una di ottone, e l'altra di acciajo, benché diversamente rigide, si vibrano in tempi proporzionali alle quantità $\sqrt{\frac{LM}{P}}$, nelle quali la rigidità né punto, né poco non c'entra. Questa conformità della mia soluzione coi fenomeni mi rende sicurissimo della sua aggiustatezza.

XXXXVI. I sommi Geometri li Signori di Alembert, e Leonardo Eulero nelle Memorie della Regia Accademia di Berlino, ed il Signor Luigi de la Grange nel tomo primo intitolato _Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis_ pretendono, che oltre la figura dal Taylor determinata possa una corda che si vibra prenderne infinite tutte fra loro diverse. Al contrario il celebre Signor Daniello Bernoulli nelle citate Memorie dell'Accademia di Prussia sostiene, che la soluzione del Signor Taylor è sola capace di soddisfare a tutti i casi possibili del problema, di cui si parla. Salvo sempre il dovuto rispetto ai tre Matematici primieramente nominati, io aderisco alla sentenza del quarto. E per mettere in chiaro la ragione che mi convince, osservo che si vagliono essi di formole, le quali non possono avverarsi se non in quei casi, in cui la forza, che spinge direttamente una particola della corda, non abbia parte nel moto delle altre particole. Esercitando azione per lo spazio minimo $-dy$ la forza sollecitante $f$ accresca la velocità $u$ nella massa $m$, e si avrà la formola sempre vera $-fdy = mudu$. Che se la massa $m$ cammina lo spazio $-dy$ nello stesso tempicello $dt$ impiegato dalla forza ad agire per lo spazio suddetto, avremo in tal circostanza $u = \frac{-dy}{dt}$, e $du = \frac{-ddy}{dt}$, preso $dt$ come costante, ed effettuate le sostituzioni giungeremo alla equazione $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$

usata

usata dai lodati Scrittori. Si muti ora supposizione, e si finga che la forza $f$ applicandosi allo spazio $-dy$ acceleri le velocità $u$, $u'$ delle due masse uguali $m$, $m'$; la prima delle quali nel tempo $dt$ dalli azione passi lo spazio $-dy$, ma non così la seconda. Nella formola $-fdy = mudu + m'u'du'$ si sostituiscano in cambio di $u$, e di $du$ i valori uguali $-\frac{dy}{dt}$ $-\frac{ddy}{dt}$, e ne risulterà l'equazione $-fdy = \frac{mdy\,ddy}{dt^2} + m'u'du'$, la quale non si accorda colla $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$, di cui perciò in questi incontri è vietato il far uso.

XXXXVII. Passiamo adesso dal generale al particolare delle corde vibranti. Se la forza (fig. 15.), che spinge l'elemento CD della corda AFB per la direzione DI, accelera soltanto il detto elemento, è concesso l'adoprare la formola $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$: ma se la fibra CD comunica il suo moto alle fibre collocate a destra, e a sinistra; egli è di mopo abbandonare la detta formola, siccome quella che non contien verità. Posto che la corda si adatti ad una delle figure da me determinate, i suoi punti si muovono con velocità proporzionali alle distanze dall'asse AB, e conforme ho provato al numero XII. il moto di un punto non influisce in quello dell'altro. Ma quando conformata la corda a figura diversa, non si osserva la detta legge di velocità; segue la comunicazione di moto fra gli elementi della corda. La formola pertanto $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$ non può somministrare altre vere figure, salvo che quelle da me stabilite. E quindi non è maraviglia, se usandola il Signor Eulero senza le debite restrizioni, si sia abbattuto in tali conseguenze, che non giudica necessario l'aver riguardo alla legge di continuità in una funzione, che dipenda dalla curva iniziale della corda. Il Signor di Alembert è di contraria opinione, e con lui va di accordo il Signor de la Grange.

XXXXVIII. Se la corda vibrandosi un solo suono produce, dee prendere una delle mentovate

figure

figure: ma se, come realmente succede, col suono principale 1 della corda intera sono misti i suoni 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. delle sue parti aliquote; si compongono insieme i moti propj delle figure 15, 16, 17, &c., ed innumerabili nuove figure ne nascono. Ed ecco col mezzo della composizione dei moti sciolto agevolmente un problema, che per altra strada riuscirebbe difficilissimo. Secondochè la corda si incita al tremito piuttosto in un modo che nell'altro, sceglierà essa la più acconcia figura, a cui può accomodarsi; e perciò il suono della corda non è mai solitario. Ho narrato al numero XX. avermi l'esperienza istruito, che stimolata una corda vigorosamente alle oscillazioni in poca distanza da uno dei due scannelli, si sentono, ponendovi la dovuta attenzione, i suoni 3, 5; che al principale 1 si riferiscono in quinta sopra l'ottava, ed in terza maggiore sopra la doppia ottava. Le ottava semplice 2, e la duplicata 4 si possono malagevolmente discernere; perchè siccome equisonanze, si incorporano col suono della corda totale. Nel citato luogo ho insegnato un artificio per udirle belli e distinti in una corda i suoni delle sue parti aliquote, che erano dianzi mischiati col suono fondamentale.

Composto l'anno 1765 spogliando alcuni miei scritti distesi molti anni fa

Schediasma V.
Delle vibrazioni delle
corde aeree.

I. Detto quanto basta intorno alle corde solide, mi rivolgo alle fluide contenute nelle canne degli stromenti da fiato; le quali corde sono quei corpi, che concorrono suono nei nominati stromenti. E voglia il vero, non può certamente il suono attribuirsi ai corpi di tali stromenti, perchè se questi suonassero, prendendoli in mano la loro palpitazione sonora si ammortirebbe, come in un campanello, o in un cilindro di creta, o di acciajo succede. Ora la voce di un flauto, di una canna di organo presi in mano non resta punto pregiudicata, e conseguentemente in essi il legno, e lo stagno non suona. Oltre a ciò se i corpi di sì fatti stromenti suonassero, lavorate due canne di organo egualmente lunghe, ma di diametro, grossezza, e materia diversa, dovrebbero produrre suoni differentissimi in riguardo al grave e all'acuto, il che di fatto interviene nei cilindri vuoti, varj di materia, di grossezza, e di diametro, ma pari in lunghezza. Le nominate canne pertanto si trovano unisone; dunque non suona la materia solida, onde sono formate, ma bensì l'aria in esse canne rinchiusa.

II. La chiarezza del metodo richiede, che dia principio dalla considerazione delle canne cilindriche di organo, per fare poi transito alle convergenti, divergenti, e di altre svariate figure. L'aria in una canna cilindrica ~~...~~ fa le sue vibrazioni nello stesso modo come una corda tesa. Questa viene resa elastica

dalla

dalla forza, o peso, che se la suppone applicato, è quella del sovrapposto peso dell'atmosfera. Espressa dunque per $m$ la massa della corda di aria, che riempie la canna, per $l$ la lunghezza della canna, o sia della corda, per $p$ il peso della colonna di aria sopvastante, per $t$ il tempo misurato per secondi di una vibrazione della corda stessa, e dinotando $b:c$ la proporzione del quadrante al raggio, $h$ la lunghezza del pendolo a secondi; e finalmente $n$ un numero della serie 1. 2. 3. 4. 5. ec. &c, secondo che la nostra corda oscilla o intiera, o divisa in parti uguali, avremo come nelle corde solide

$$t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{lm}{hp}} \quad (1).$$

Il peso dell'atmosfera sopvastante alla canna equivalga ad un volume di mercurio di figura cilindrica, la cui altezza $a$, e la base uguale a quella della canna; e conciossiaché il volume della corda di aria si uguagli alla lunghezza $l$ della canna moltiplicata nella base della stessa, si raccolga, che i due volumi di mercurio, e di aria stanno fra loro come $a : l$. Si suppongano come $G : g$ la gravità specifiche, o densità del mercurio, e dell'aria; e giacché le masse si corrispondono nella ragione composta dei volumi, e delle gravità specifiche, si avrà $p : m :: aG : lg$. Nella sovrapposta formola si sostituiscano in cambio di $p$, $m$ le grandezze proporzionali $aG$, $lg$, e così presenterà

$$t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb.\sqrt{haG}} \quad (2.)$$

III. La base della canna non ha luogo nella determinazione del suo suono, o sia nella

durata

durata di una sua vibrazione; restando essa base esclusa dalla formola $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb\sqrt{hag}}$, e colla teorica ~~uni~~ trovandosi uniformi gli esperimenti. Quantunque la base della canna indiffinitamente crescesse, non pertanto il suo suono si muterebbe. Ora l'allargare indiffinitamente le pareti della canna egli è lo stesso che il totalmente levarle, e far passaggio dall'aria chiusa all'aria libera; dunque anche nell'aria libera un'onda pari in lunghezza alla corda aerea nella canna contenuta sarà unisona ad essa canna.

Nella Dissertazione I. dello Schediasma VIII. dimostrerò, che il suono scorre lo spazio $l$ nel tempo $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2b\sqrt{hag}}$; formola, che si accorda colla teorica ritrovata, purchè sia $n=2$, e la corda d'aria intera si vibri. Quindi nel tempo stesso, in cui la canna fa una oscillazione, il suono viaggia per uno spazio lungo quanto ~~la canna~~ la corda d'aria contenuta dentro la canna. Afferma il Cavalier Newton (a) che l'onde generate nell'aria da una canna di organo sono il doppio lunghe della stessa canna. A questo equivoco ha dato motivo il celebre M. Sauveur, il quale nella canna di organo conta per una vibrazione un'andata, ed un ritorno, cioè a dire due vibrazioni conforme il linguaggio comune. Se dunque in tempo di due vibrazioni della canna, la cui lunghezza $l$, il suono, che si muove egualmente, scorre lo spazio $2l$; egli è manifesto che nel tempo di una sola vibrazione camminerà lo spazio $l$, e si genererà un'onda eguale ~~alla canna~~ nella lunghezza alla corda di aria rinchiusa nella canna.

(a) Philos.ae natur.is Princ.a Math.ca Amstelodami 1714. pag.a 344.

IV. Ci insegna la nostra formola $t = \frac{c\,l\sqrt{g}}{2nb\sqrt{haG}}$; che ~~due canne~~ nello stesso parallelo, o anche in paralleli diversi, ma non sì fattamente remoti, che si alteri sensibilmente la lunghezza h del pendolo a secondi, colla condizione altresì che l'aria sia egualmente calda, onde la sua densità g dell'aria accettino la proporzione dei pesi corrispondenti a G, e si mantenga costante la frazione $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$, i tempi delle oscillazioni delle corde aeree in più canne rinchiuse, le quali corde ~~di più canne, che~~ si vibrino intere o divise nello stesso numero n di parti eguali, si riserveranno nella ragione delle lunghezze. Questo canone è noto per pratica ai Fattori di organi, i quali allora quando vogliono che per esempio due canne faccian l'Ottava, cioè che i tempi delle vibrazioni loro stiano come 2 : 1, stabiliscono la prima canna il doppio lunga della seconda. Intanto si cavi la conseguenza necessaria alle cose, che son per dire, che divise due ~~canne~~ corde aeree in medesimi strati egualmente alti, il tuono di esse corde non dalle basi degli strati, ma dal numero loro proporzionale alla lunghezza delle corde unicamente dipende.

V. Che se o in diversi siti, o pure nello stesso, ma in differente stagione, il calore dell'aria sia vario, rimanendo per altro costante la lunghezza h del pendolo a secondi, si scopriranno i tempi delle vibrazioni delle canne come $\frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$ e quelli della canna medesima come $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$.

Osservammo nella Dissertazione I. dello Schediasma VIII. che nelle opposte stagioni di inverno, e di estate la velocità del suono si corrispondono come 26 : 27, e che per conseguenza scorre lo stesso spazio in tempi, che stanno in ragione di

di 27 : 261. Ma nel tempo, in cui del suono si cammina lo spazio 1; una ~~canna~~ corda d'aria ugualmente lunga compie [racchiusa dentro una canna] una vibrazione; dunque la medesima corda nelle stagioni ternate, ed estiva oscilla in tempi, che si riferiscono nella proporzione di 27 : 261, ed è nell'inverno un tuono di Tuono, o di Seconda maggiore più grave che nella state. E poichè è come $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{aG}}$ ~~relativamente~~ rispettivamente alla stessa ~~canna~~ corda, sarà quella grandezza nelle contrarie mentovate stagioni come 27 : 261, ed il suo quadrato $\frac{e}{aG}$, o sia la densità dell'aria diversa, per il peso comprimente, come $\overline{27}^2 : \overline{261}^2$, o a cui di pesto come 14 : 13; e quando il peso comprimente non sia diverso, la densità dell'aria si riguarderanno in tale ragione.

VI. Il dottissimo Signor Leonardo Eulero guidato dalle sue teoriche asserisce (6), che in varie stagioni la diversità del suono di una canna d'organo può giungere ad un Tuono intiero. Conferma egli questo suo detto coll'esperienza dei Musici, i quali usando nel tempo stesso stromenti da corda, e da fiato, trovano questi così fattamente mutabili (e la varietà massima ascende ad un Tuono) che bisogna che ora rallentino, ed ora stirino le corde di quelli, acciocchè cogli stromenti da fiato vadan d'accordo. Per accertarmi della verità della riferita esperienza, accordai all'unisono nella stagione di inverno un gravicembalo, ed un flauto, e paragonatili insieme nel calor della state, trovai per appunto il secondo notabilmente più acuto del primo per una Seconda maggiore, o Tuono all'incirca. Se il gravicembalo non fosse soggetto a variazione, egli è indubitato, che la diversità tutta di un Tuono dovrebbe attribuirsi allo stromento.

(6) Tentamen novæ Theoriæ Musicæ pag. 21.

stromento da fiato. — Massi frattanto da parte gli stromenti variabilissimi quanto a di corde di minugia, un gravicembalo cangia di tuono al mutarsi delle stagioni: ed essendo, come poco stante vedemmo, l'alterazione delle corde solide contraria a quella delle fluide, di maniera che calando quelle di tuono, crescono queste, o alle opposto; ne segue che accordati all'unisono un gravicembalo, ed uno stromento da fiato in tempo di inverno, si trovi il primo in tempo di estate più grave del secondo per un intero tuono. Ho già stabilito che passando dall'inverno alla state i suoni delle corde di aria crescono per la terza parte di un tuono; dunque fa di uopo che i suoni delle corde di metallo calino per due terzi di tuono onde ne risulti nella più calda stagione, conforme si raccoglie dalla sperienza, un tuono di svario fra uno stromento da fiato, ed un gravicembalo, che in tempo di inverno erano tra loro unisoni.

VII. Basta riflettere che due corde, una fluida, e l'altra solida, sono rese elastiche da forze contrarie, cioè quella da una forza premente, e questa da una forza stirante, per chiaramente capire che la rarefazione cagionata dal caldo debba in esse corde produrre contrarj effetti, e lo stesso dicasi della costipazione cagionata dal freddo. Allora che una corda solida si rarefà per il caldo, esercita meno sforzo contro il peso stirante, e conseguentemente cala di tuono, seguendo in essa il medesimo effetto, come se non essendosi rarefatta, avessi allentato il peso. All'opposto costipata dal freddo una corda solida,

s'aumenta

si aumenta il suo sforzo contro del perno, e perciò cresca di tuono, succedendo in essa lo stesso effetto, come se non essendosi costipata, avessi ingrandita la sua tensione. Sostituito al perno un peso pendente, non si altera per motivo della tensione il tuono della corda allo variarsi delle stagioni. Mentre la corda si rarefà, il peso discende, e mentre si costipa, il peso ascende; e perciò le sue fibre sono sempre ugualmente tese. Immaginiamoci che rarefacendosi la corda, il peso corrispondentemente si scemi, di maniera che non discenda, e si fermi immobile nel suo sito; e che al contrario secondochè la corda si costipa, il peso si accresca, onde rimanendo stabile nel posto solito non ascenda; e facilmente scopriremo, che da sì fatti pesi variabili vengono giustamente rappresentati i mutui sforzi della corda e del perno, minori l'estate, e maggiori l'inverno.

Intanto non dissimulo una obbiezione, ed è che rarefacendosi, o costipandosi una corda solida, si rarefà parimente, o si costipa la tavola, su cui è tesa, e conseguentemente non si altera la sua tensione. Sarebbe vera la conclusione, se la corda, e la tavola per la direzione delle sue vene si rarefacessero, e costipassero del pari; ma l'esperienza dimostra, che la prima è più atta alla rarefazione, ed alla costipazione della seconda. Ella è la differenza fra le rarefazioni, e le costipazioni della corda, e della tavola su cui è tesa, che opera i cangiamenti di tuono in essa corda, i quali si troverebbero molto maggiori, se la lunghezza della tavola non venisse o accresciuta, o diminuita dall'azione delle stagioni.

VIII.

VIII. Passiamo adesso alla considerazione della corda aerea resa elastica da una forza premente. Quando l'aria vie più si riscalda, cresce la sua elasticità, ed acciocchè non si rarefacesse, farebbe di uopo accrescere a dovere il peso dell'atmosfera. Quindi si diminuisce la proporzione fra la densità $g$ dell'aria, ed il peso comprimente $aG$, e per conseguenza il valore della quantità $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$ nella stagione di estate è più piccolo che in quella di inverno. E concciossiachè i tempi delle vibrazioni della stessa canna siano proporzionali a $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$ (V.), ne segue che in una oscillazione di estate si impiegherà minor tempo che in una di inverno, e perciò renderà un suono più acuto, e già ho determinato (V.) che i detti tempi nella più fredda, e nella più calda stagione si corrispondono nella ragione di 27 : 26.

IX. Raccogliesi dalla formola $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb\sqrt{aG}}$, che potendo solamente competere ad $n$ i valori 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c, secondochè la corda di aria si vibra o intera, o divisa in due, in tre, in quattro &c parti eguali, ha solamente facoltà di (può) la stessa solo oscillare, in tempi proporzionali ai termini della serie $1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{5}.\ \frac{1}{6}.$ &c; e poichè i suoni, o i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari stanno in ragione inversa dei tempi, che in una vibrazione si impiegano, produrrà essa corda nelle addotte circostanze i suoni 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c esclusi tutti gli altri di mezzo. In fatti dando il conveniente

fiato

fiato ad una canna di organo, si udirà il suono 1. ed insistendolo poscia a dovere si passerà con un salto di Ottava al suono 2. ed indi con salto di Quinta al suono 3. &c, nè per quante prove si facciano, riuscirà mai di ottenere alcun suono intermedio fra l'uno e il Due, fra il Due e il Tre &c. Or ecco chiaramente spiegato il maraviglioso fenomeno dei suoni &c 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c della tromba, e dei corno da caccia, della qual cosa ne ho detto un cenno nel precedente. Schediasma IV. (a) il numero VI. ~~Problema I.~~ Del citato ~~Schediasma~~ numero ci documenta, che una corda elastica non può oscillare salvo che intera, o divisa in parti ~~qualunque~~ aliquote, e perciò rifrandosi i suoni in proporzione reciproca delle lunghezze di esse parti, se la corda intera produce il suono 1. le due metà renderanno il suono 2. le tre ~~metà~~ terze parti il suono 3. e così di mano in mano. Nè si troverà giammai alcuna voce di mezzo, perchè questa sarebbe propria di una parte aliquanta, e la corda non può suonare in parti aliquanta distribuita.

X. Una corda di lunghezza finita, atta a concepire un suono determinato, è parte aliquota di una corda lunga infinitamente, la quale per conseguenza può in se stessa il detto ~~qualunque~~ suono ricevere qualunque egli siasi. Quando ~~Mentre~~ palpita un corpo elastico, il tremito sonoro si diffonde sfericamente all'intorno per tanti raggi, o corde aeree, ~~che~~ si continuerebbero all'infinito, se il mentovato tremito non venisse finalmente dalle resistenze attutato, mentre ancora ci resta dell'aero immenso, a cui si avrebbe potuto comunicare. Ciò non si verifica solo nell'aria libera, come in un'aperta campagna, ma parimente nei luoghi chiusi, nei quali qualsivoglia linea sonora si continua col mezzo di replicate

riflessioni

(a) ~~Problema I. cor. I.~~ VI.

riflessioni, sin tanto che la palpitazione si annichila. Potendo adunque le corde esterne di aria considerarsi di infinita lunghezza, sono idonee a ricevere, ed a portare alle orecchie qualunque suono. + Non c'è per tanto bisogno di ricorrere alle ipotesi di M. de Mairan, che si è immaginato l'aria composta di particole di tutti i tuoni, fra le quali si vibrino quelle soltanto, che sono unisone al corpo sonoro, o alla causa determinante il suono. Se l'aria è capace di qualunque suono, perché formata di particelle talmente varie di tuono, che ogni suono ritrova la unisone da porre in moto; dunque anche la tromba, in cui il corpo che suona si è l'aria, sarà atta a ricevere qualunque suono, il che è contrario agli esperimenti. Dando al fiato un impulso conveniente, oscillano le particole, il cui tuono si esprime per l'unità: accrescendo gradatamente lo sforzo del fiato, le particole del tuono 2. concepiscono vibrazione: ora io dimando il perché i fiati di rigore intermedio non facciano oscillare le particole di tuono mezzano fra l'unità, ed il binario. S'applichi il discorso alle particole di tuono medio fra il 2. ed il 3. fra il 3. ed il 4. &c. Di più accresciuta o diminuita la lunghezza della tromba, le particole, che prima si vibravano, rimangono in quiete, ed all'incontrario quelle, che erano immobili, acquistano palpitazione. Quindi chiaramente comprendesi, che non dai tuoni delle particole aeree, ma bensì dalla lunghezza della corda nel corpo della tromba contenuta, ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~

fattene [illegible] e

+ a capo

e dalla sua divisione in parti aliquote i suoni di esso stromento dipendono: e fatto uso del qual principio agevolmente si spiega, conforme ho fatto vedere, potere l'aria esterna in se stessa qualsivoglia suono ricavare. Questa è per lo più la infelice condizione delle ipotesi, che servono non v'ha dubbio a spiegare quei fenomeni, in grazia dei quali sono state inventate; ma poste al cimento con qualche sperienza, che non sia caduta sotto la considerazione del loro autore, non istanno salde alle prove.

XI. Sin qui non ho considerato salvo che canne cilindriche, e scoperte le leggi della loro oscillazione, mi sono fatto strada a dilucidare alcuni fenomeni dell'onde aeree appartenenti dei suoni. Ma conciossiachè i suoni non solo si danno dalle canne, ch'io chiamerò con vocabolo generale prismatiche, alle quali tutte si applicano i sovrapposti raziocinj, ma eziandio di quelle, che sono lavorate a forma di pezzi conici, o piramidali, convergenti, o divergenti, o in qualsisia altra guisa, egli è di mestieri per non prendere abbaglio, l'avvertire come vadano generalmente espressi i pesi comprimenti, e le masse di aria, che dentro esse canne vengono poste in oscillazione, onde chiara spicchi la verità comprovata dalla sperienza, che le vibrazioni di sì fatte canne altresì seguitano la legge di quelle delle canne prismatiche.

La densità dell'aria è la stessa tanto in una canna prismatica, quanto in un'altra di qualsisia differente figura. E poichè la densità sta nella proporzione del peso comprimente, dovrà a questo adattarsi in ambo i casi la stessa espressione: ma in riguardo alle canne prismatiche viene dinotato dalla

quantità

quantità $aG$; dunque la medesima quantità la indicherà anche nelle canne, di cui parliamo.

Ho di sopra avvertito ai numeri (IV. e V.) che i soli elementi atti a variare il suono delle corde nostre inchiuse in una canna sono non la base maggiore, o minore degli strati egualmente alti, che la compongono, ma solamente il numero loro, o sia la lunghezza delle corde, ed il diverso valore della grandezza $\frac{g}{aG}$, cioè della densità $g$ dell'aria divisa pel peso comprimente $aG$, purchè come si suppone perseveri sempre invariata la lunghezza $h$ del pendolo a secondi. Da ciò se ne deduca essere unisone due canne, in cui il numero degli strati ugualmente alti è costante, e costante altresì la relazione di $g$ ad $aG$. Riscontrandosi ad entrambe adunque il tempo di una vibrazione si esprimerà per $\frac{c}{\pi n b} \cdot \frac{\sqrt{g} \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{aG}\,\sqrt{h}}$, e siccome $aG$ esprime da un canto, e dall'altro il peso comprimente, così $lg$ denoterà quella massa di amendue le corde, la quale ha luogo nella determinazione del suono.

XII. Leggo nell'opera altrove citata dell'acutissimo Signor Eulero pag. 25. che per trovare il suono di una canna convergente, o divergente, o di qualunque altra figura, fa di uopo considerare una corda simile, e scopertone il suono, supporre la stessa corda formata di aria, ed il peso tendente uguale alla forza dell'atmosfera, e raccogliere poi da questi nuovi dati il suono della canna. Che se un tale problema si scioglierà universalmente assegnando qualsivoglia figura alla canna, si caperà la notissima proprietà delle canne prismatiche, che serrate al di sopra rendono in

ne suona poi un'Ottava più grave. Quanto
a questo ultimo fenomeno vedrà il Lettore con
quale semplicità io lo spieghi (al numero XVIII). Ma ri=
volgendo la riflessione alle canne di figura
diversa dalla prismatica, sembrami non potersi
il metodo del Signor Euler approvare.
Ai tempi delle vibrazioni delle canne, e delle
corde prismatiche si adattano le stesse formole;
perchè gli strati tutti ed in quelle, ed in queste
hanno ricevuta da un'uniforme compressione, o
stiramento, pari elasticità. + Ora una tale cor= + a cui
rispondenza non passa fra una canna ed una
corda simili di figura, ma non prismatiche.
In ogni strato della canna le particole tutte
sono egualmente dense, compresse, ed elastiche.
Così non succede negli strati della corda; i qua-
quanto hanno la base maggiore, tanto sono
composti di particole meno tese; imperocchè
distribuendosi la forza stirante in un numero di
parti eguale a quello delle particole formanti la
base di uno strato, ne tocca a ciascuna parti=
cola minor porzione, secondochè è più grande
il numero di esse particole. Dipende la notata
diversità dalla varia natura del fluido, e del
solido.

XIII Che se si concepisse l'idea matematica
sì, ma non fisica, di una corda solida non pris=
matica, in cui le fibre di qualunque menomo
strato fossero ugualmente tese, il che addiverrebbe
quando ogni strato fosse teso da forza alla base pro=
porzionale, in tal caso la nostra corda si potrebbe
senza taccia di paralogismo con una canna di
simil figura paragonare.

Si generi la figura della corda MO
(fig. 95) dal giramento della curva MNO intorno
all'asse AB, e siano AB = L, BH = x, HK = dx,
e le due sezioni circolari, cioè Oo = a, Nn = q.

Nominata

Schediasma V.

Nominata M la massa di una corda cilindrica egualmente lunga, fornita della base $Oo = a$, e composta della stessa materia; determino la massa $\frac{M\varphi\,dx}{aL}$ dell'elemento HK della corda Mo col mezzo della seguente analogia $aL : \varphi dx :: M : \frac{M\varphi dx}{aL}$; Sia P la forza tendente la sezione $Oo = a$, e conciossiachè le forze stiranti deggiono essere proporzionali alle sezioni, avremo $a : \varphi :: P : \frac{P\varphi}{a}$, ed il quarto termine si eguaglierà alla forza stirante l'elemento HK.

Vibrandosi la nostra corda si adatterebbe alla curva AZB (fig. 15.) determinata nel ~~Problema~~ nuovo V dello Schediasma IV. e sarebbe isocrona ad una corda cilindrica della stessa materia, e lunghezza, la cui grossezza $Oo = a$, e la tensione $= P$. Allora che l'elemento HK si ritrovasse nel sito Dd, sarebbe tirato per la direzione delle tangenti PD, Dd dalla medesima forza $\frac{P\varphi}{a}$, come se la corda AB avesse la grossezza costante $\varphi$, le convenisse la massa $\frac{M\varphi}{a}$, e tutti i suoi elementi fossero tirati dalla mentovata forza $\frac{P\varphi}{a}$. Quindi posta l'ordinata $DH = y$, per le cose dimostrate, nel numero VII. ~~del~~ citato ~~Problema~~ Schediasma sarebbe la forza acceleratrice dell'elemento Dd per la direzione DH $=$

$$\frac{4n^2b^2y}{c^2L} \cdot \frac{P\varphi}{a \cdot \frac{M\varphi}{a}} = \frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$$

: ma dalla stessa forza acceleratrice è sollecitato l'elemento Dd di una corda cilindrica della medesima materia, e lunghezza, la cui grossezza $Oo = a$ (fig. 25.), e la tensione $= P$; dunque la corda Mo ~~(fig. 25)~~, e la detta corda cilindrica sarebbero unisone: proprietà, che ho già stabilito al numero (XI.) parimente avvertirsi

nella

nella canna di qualsivoglia figura Mo, e nella cilindrica AB·Oo. Dunque paragonando insieme la corda Mo colla canna Mo, e la tante volte nominata corda cilindrica con una canna di simile eguale volume, potrei rettamente conchiudere, che nella stessa proporzione, in cui si corrispondono i suoni della terza, e della quarta, si riguardano altresì quelli della prima, e della seconda.

XIV. Quantunque sembri perfetta la corrispondenza fra la descritta corda Mo, ed una canna di figura simile ed uguale, viene essa turbata da una particolarità, che non si vuol trascurare. Insieme colla corda Mo si vibrano tutti i suoi elementi egualmente lunghi HK, la massa dei quali sono maggiori, o minori secondo l'indole della curva MNO. Sia collocata in B la bocca della canna Mo, da cui ha l'origine il suono, che si propaga da B verso A. Nello Schediasma VIII. dimostrerò, che nell'aria si diffondono le vibrazioni non per settori sferici, ma bensì per linee, o raggi sonori. Quindi tanti raggi contandosi nella sezione Nn, quanti nella Mm, non oscilla tutta la massa aerea Mo, ma soltanto l'aggregato dei detti raggi, il quale è congruamente rappresentato dalla massa di una corda cilindrica, e non già da quella della corda Mo. Con ragione adunque nella canna Mo, non altrimenti che nella cilindrica, ho espressa per lg (XI.) la massa, che ha luogo nella determinazione del loro suono.

XV. Per sapere il numero delle vibrazioni, ch'io chiamo s, effettuate da una corda di aria di data lunghezza l in un minuto secondo, fatta la riflessione adempiersi l'equazione

$$s = \frac{1}{t}$$

Schediasma V.

$s = \frac{1}{t} = \frac{2nb\sqrt{haG}}{cl\sqrt{g}}$ (3.) ; e supponendo che la corda si vibri intera, onde sia $n=1$, egli è di uopo collocare nell' omogenea di comparazione in cambio di $\frac{2b}{c}$, di $h$, e di $\frac{aG}{g}$ i convenienti valori. Il semicircolo diviso pel raggio, cioè $\frac{2b}{c}$ si adegua a $\frac{355}{113}$, e si sa essere la lunghezza $h$ di un pendolo a secondi eguale ad oncie del piede di Parigi $36\frac{17}{24}$. Resterebbe da mettersi a computo la grandezza $\frac{aG}{g}$, o sia la proporzione fra il peso $aG$ dell' atmosfera, e la densità $g$ dell' aria: ma conciossiachè si potrebbe sbagliare nella determinazione della densità dell' aria pura, a cui soltanto si comunicano le vibrazioni sonore, della qual cosa ne parlerò exprofesso nello Schediasma VIII. e poichè ho dimostrato viaggiare il suono per lo spazio $l$ nel tempo stesso, in cui una corda di aria lunga quanto il detto spazio si vibra una volta; dedurrò dalla velocità del suono resa nota colla esperienza il valore della totale quantità $\frac{2b\sqrt{haG}}{c\sqrt{g}}$.

Ci insegnano le diligenti osservazioni fatte l'anno 1738. dai Signori Cassini di Toury, Maraldi, Abbate della Caille scorrere il suono in un minuto secondo piedi Parigini 1038. equivalenti ad oncie 12456. nel qual tempo una corda aerea di pari lunghezza compirebbe una oscillazione. Essendo dunque $s=1$. ne risulta $\frac{2b\sqrt{haG}}{c\sqrt{g}} = l = 12456$. Sostituito questo valore in sua vece di $\frac{2b\sqrt{haG}}{c\sqrt{g}}$ nella formola (3), scopriremo $s = \frac{12456}{l}$ (4), espressione

espressione semplicissima, da cui facilmente si raccoglie il numero $s$ delle vibrazioni, che nelle temperate stagioni del nostro clima effettua una corda di aria di qualsivoglia lunghezza $l$ in un minuto secondo.

XVI. Si deduce dalla nostra formola, che una corda d'aria lunga once $61\frac{1}{17}$ fa in un secondo vibrazioni 204. Il rinomato M. Sauveur ha con accuratissimi esperimenti scoperto, che una canna di organo lunga once 60 fa in pari tempo giusta il suo metodo di computare vibrazioni 102. composte di un'andata, e di un ritorno equivalenti a 204. calcolate conforme l'uso comune. Avendo io dimostrato (III.), che due corde di aria unisone, una libera, e l'altra da una canna circondata, sono di eguale lunghezza; fa di uopo dire, che a cagione di replicate riflessioni si segue dentro la canna una corda tortuosa, che sia once $1\frac{1}{17}$ più lunga della canna predetta; dimodochè la lunghezza della corda, e quella della canna stiano fra loro in ragione di $61\frac{1}{17} : 60$, o prossimamente come $58 : 57$. Le pareti della canna impediscono, che il tremito sonoro non si comunichi all'aria, che esternamente tocca la canna medesima. Or ecco adunque che seguono innumerabili urti delle particole aeree contro i lati della canna, ai quali urti corrispondono altrettante riflessioni, ed effetto della percossa, e delle ripercosse si è l'allungamento notato della corda di aria nella canna racchiusa. Quando si tratti più tosto di ritrovare il numero delle vibrazioni, che fa una canna di organo in un minuto secondo, bisogna avvertire, che dalla lettera $l$ nella formola $s = \frac{12456}{l}$ viene dinotata non la lunghezza della canna, ma bensì quella della corda aerea, la quale si riferisce alla lunghezza della

canna

canna di piedi cinque, o sia di once 60 in ragione di 5¼ : 5½. ~~[illegible]~~ Questa proporzione si altera qualche poco nelle canne più lunghe, o più corte di cinque piedi, per cagione della dissimiglianza della loro figura, meno crescendo, o scemando i diametri, di quello che crescano, o scemino le lunghezze; e quindi non dovremo maravigliarci se le lunghezze, ed i tempi delle vibrazioni delle canne non si corrisponderanno nella stessa precisa scrupolosa ragione.

XVII. La tortuosità della corda di aria contenuta nelle canne si conferma evidentemente colla seguente esperienza. Feci lavorare tre canne 1. 2. 3. (Fig. 70.) egualmente lunghe once 11. linee 2½ del piede di Parigi, e pari di diametro nel sito della bocca AB dove si genera il suono. La prima canna era cilindrica, la seconda un frusto conico convergente, e la terza al contrario un frusto conico divergente. Il diametro CD della estremità della seconda canna era la metà del diametro CD = AB della prima, ed all'opposto la terza canna aveva il diametro CD doppio del diametro CD = AB della prima canna cilindrica. Sonando la canna convergente 2. doveano entro la stessa seguire più riflessioni che nella canna cilindrica 1. e segnarsi conseguentemente in quella un'onda più lunga che in questa. Tutto a rovescio sottraendosi per dir così all'urto dell'aria le pareti della canna divergente 3. l'onda vi seguiva meno tortuosa, e sarà più corta di quella, che nella canna cilindrica è contenuta. L'esperienza corrispose interamente all'aspettazione, ed essendo la canna prima unisona al B del mio stromento da tasto, trovai la seconda sonare il B♭, la terza il C.

XVIII. Atteso che la prima canna è proporzionatamente

namente più larga di una canna di cinque piedi, la sua lunghezza a quella della corda di aria si riferirà in una proporzione alquanto più prossima di 517 : 540, che s'adegua alla terza parte di un Semituono all'in circa: ma la terza canna divergente è un semituono più acuta della prima canna cilindrica; dunque la corda di aria nella terza canna divergente rinchiusa è di essa canna più corta. Ora anche dentro si fatta canna seguendosi tortuosa la corda di aria; egli è manifesto, che non terminerà alla estremità della canna, ma bensì alquanto al di dentro nel sito C; imperocchè se così non fosse, la lunghezza della corda sarebbe maggiore di quella della canna.

Allora quando gli accordatori di organo vogliono far crescere il suono di una canna, ne allargano un micolino l'estremità, e succede lo stesso effetto, come se la canna un po' si accorciasse. L'allargamento adunque opera sì, che la corda di aria finisca alquanto più abbasso. Ristretto un poco il diametro della estremità della canna, si aumentano le riflessioni, e crescendo la lunghezza della corda di aria, il suono decresce. Di tale artifizio si servono gli accordatori per far calare una canna di organo.

Che se l'apertura DC totalmente si otturasse, allora il transito sonoro si riflette nel coperchio DC, e tornando indietro trova l'uscita per la bocca AB. Dentro una canna serrata per tanto si determina un'onda il doppio lunga di quella, ch'è contenuta dentro una canna aperta, e conseguentemente la canna serrata corrisponderà in Ottava grave alla canna aperta, conforme in fatti l'esperienza ci insegna.

XIX. Fatto sonare due differenti stromenti da fiato, come per esempio un oboè ed un flauto, le lunghezze delle corde tortuose di aria starebbono fra loro in ragione inversa dei suoni dei nominati stromenti. Ma se le loro canne non si

corrisponderanno

## Schediasma V.

corrisponderanno nella medesima proporzione, ciò dinoterà che l'onde non si descrivono egualmente tortuose, e che forse amendue non finiscono alla estremità della canna. Oltre la varia figura della canna, può essere cagione del primo effetto la diversa maniera, colla quale si genera il suono. Spinto il fiato dentro la pivetta dell'oboè, si dilata essa, ed indi si comprime, ed il fiato concepisce un tremito sonoro avente una direzione assai trasversale. Quindi non poco considerabile riuscirebbe la tortuosità dell'onda, se da un contrario elemento, cioè a dire dalla divergenza della canna non venisse modificata. Nel flauto tutto all'opposto poco tortuosa si segue l'onda ~~per cagione~~ mediante l'artifizio, con cui si produce il suono, ma non così adiviene per cagione della figura della canna, la quale siccome convergente, alla tortuosità è favorevole. Nei due mentovati stromenti si contemperano in guisa tale gli elementi contrarj, che conforme ho trovato cogli esperimenti, la lunghezza dell'oboè a quella del flauto sta in ragione inversa dei suoni prodotti da essi stromenti.

Paragonando il suono di qualunque stromento da fiato con quello di una canna di organo di cinque piedi, o di once 60. riuscirà facile il determinare la proporzione fra la lunghezza del corpo dello stromento, e della corda tortuosa di aria dentro lo stesso rinchiusa. Conciossiachè l'armonia, che rendono i due suoni, manifesta la relazione fra i tempi delle vibrazioni, facciasi come il tempo di una vibrazione della medesima canna di organo al tempo di una oscillazione dello stromento, così $61\frac{1}{15}$, lunghezza della corda di aria contenuta dentro la stessa canna, al quarto termine proporzionale, che si agguaglierà alla lunghezza della corda aerea, che nel corpo dello

stromento

stromento fra le sue vibrazioni; la quale colla lunghezza di esso corpo si può mettere agevolmente al confronto.

XX. Il sopra lodato Signor Leonardo Eulero è stato il primo, che abbia dato al pubblico nell' Opera altra volta citata (d) la formola, colla quale si determina il numero delle vibrazioni fatte da una canna di organo in un minuto secondo. Ora in cambio di indagare la proporzione fra le densità del mercurio e dell' aria sonora, stabilisce quella fra le densità del mercurio, e dell' aria mista colle particole eterogenee. Da ciò ne segue, che giusta il suo computo si attribuisca ad una data canna un numero di vibrazioni notabilmente minore di quello, che con accurate sperienze ha ritrovato M. Sauveur. L' ignorare la verità, che il suono scorre la lunghezza di una corda di aria nel tempo, in cui essa fa una vibrazione, ha dato motivo al notato sbaglio.

Secondo il Signor Eulero le densità $G$, $g$ del mercurio, e dell' aria stanno fra loro nelle stagioni temperate come $11000 : 1$, e quindi $\frac{G}{g} = 11000$.

Mediante il raggio del suono ho scoperto il numero (XV.) $\frac{2b\sqrt{haG}}{c\sqrt{g}} = 124561$, formola da cui si deduce $\frac{c^2\cdot\overline{124561}^2}{4b^2\cdot ha} = \frac{G}{g}$: ma il raggio diviso pel semicircolo, o sia $\frac{c}{2b} = \frac{113}{355}$, la lunghezza $h$ del pendolo a secondi si uguaglia ad once $36\frac{17}{24}$ del piede di Parigi, e l' altezza media $a$ del mercurio nel barometro ad once $24$; dunque $\frac{\overline{113}^2\cdot\overline{124561}^2}{\overline{355}^2\cdot 36\frac{17}{24}\cdot 24} = \frac{G}{g}$ $= 15294$, e conseguentemente le densità $G$, $g$ del mercurio, e dell' aria sonora si corrispondono nella ragione $15294 : 1$. Il numero delle vibrazioni di una canna di organo

in

(d) Tentamen novae Theoriae Musicae pag. 20.

incominciando secondo, che generalmente si esprime per $\frac{2b\sqrt{hag}}{cl\sqrt{g}}$; seguita la proporzione della grandezza $\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}}$ supponendo costanti le quantità h, a, l. Avremo per tanto

$\sqrt{15294} : \sqrt{11000} :: 204 : 173$,

e l'ultimo termine dell'analogia ci insegna, che una canna di cinque piedi, la quale M. Sauveur ha trovato coll'esperienza oscillare 204 volte nel detto tempo, farebbe soltanto vibrazioni 173, se si dovesse introdurre nel calcolo la densità dell'aria mescolata colla particola eterogenea. Oltrechè questo troppo scarso numero di oscillazioni mal si concilia colla velocità del suono; non è verisimile, che un uomo così diligente come M. Sauveur abbia commesso l'errore di 31 vibrazioni in 204.

Schediasma VI.

Della misura, che debbono assegnarsi alle corde di uno stromento, ed alle canne d'organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli.

I. Acciocchè un musico stromento produca grata sensazione nell'organo dell'udito, non basta che ciascun suono considerato da se solo sia dilettevole; ma bisogna altresì che siano forniti della stessa indole, e di egual forza. La seconda proprietà rende lo stromento uniforme, e fa sì che ogni suono meriti la medesima stima: la terza proprietà ottiene l'effetto, che come si suol dire un suono non copra l'altro, e del pari si odano le voci gravi, ed acute. Darò principio dalle corde di uno stromento, ed indi passerò alle canne d'organo, e stabilirò in quelle, ed in queste le misure opportune, onde i loro suoni riescano aggradevoli, e vigorosi egualmente.

Determinare qual proporzione si debba assegnare alle dimensioni delle corde, acciocchè i loro suoni riescano del pari aggradevoli, e forti.

II. Le corde sonore vogliono esser tese sì fortemente, che per poco che si accresca la loro tensione si rompano. Se due corde della stessa materia formate siano differentemente grosse, correranno eguale pericolo di spezzarsi, quando le forze tendenti stiano in ragione delle grossezze; e quindi si fatte corde di varia grossezza si debbono stirare con forze proporzionali alle loro basi. Il gagliardo distendimento delle corde rende viva, e spiritosa la palpitazione delle parti minime componenti esse corde, nella quale il suono principalmente consiste.

III. Ciò premesso, io mi servo del seguente giro di raziocinio. Abbiansi due corde AB, ab (fig. 27) della stessa materia, grossezza, e tensione, e differenti solo nella lunghezza, le quali compiuta

una

una vibrazione si ripieghino talmente, che siano le massime saette $CF = C$, $cf = c$. Dalla equazione della curva AFB, afb determinata nel numero IV. dello Schediasma IV. agevolmente si deduce, che segnate le ascisse BH, bh; BK, bk proporzionali alle lunghezze delle corde BA, ba, sarà sempre $HD : hd :: CF = C : cf = c$, $KE : ke :: CF = C : cf = c$. Giacchè $BH : bh :: BK : bk :: BA : ba$, avremo parimente $HK : hk :: BA : ba$. Siano DE, de, che adequatamente si eguagliano ad HK, hk, due menome porzioni delle corde AFB, afb. Poichè le nostre corde sono della stessa materia, e del pari grosse, le loro masse serbano la proporzione delle lunghezze BA, ba, che io chiamo L, l, e tale altresì è la relazione che passa fra le masse degli elementi DE, de. Si osservi al numero XIV. del citato Schediasma IV. la formola della velocità, che acquista una corda oscillando, e trattandosi di corde egualmente tese, e grosse, e che oscillano insieme, avremo che le velocità degli elementi DE, de, quando si trovano a distanze dalla linea retta BA, ba proporzionali alle massime saette $CF = C$, $cf = c$, o alla stessa linea retta son pervenuti, stanno in ragione composta, diretta delle nominate massime saette C, c, ed inversa delle lunghezze delle corde L, l, cioè a dire $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$. Da tali velocità prendono norma quelle, che dalle infinitesime porzioni DE, de delle corde AFB, afb vengono impresse alle particole aeree, le quali mentre sono lontane dal punto medio delle loro vibrazioni per ispazj proporzionali alle grandezze C, c, si muovono con celerità che accettano la ragione $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$.

IV. Il numero de' raggi sonori cagionati nell'aria dal tremito degli elementi egualmente grossi DE, de è certamente proporzionale alle loro lunghezze DE, de, e conseguentemente alle

lunghezze

lunghezza delle intere corde L, l. Conciossiachè questi raggi si spargono sfericamente all'intorno per ogni verso; egli è fuori di dubbio, che all'orecchio di chi ascolta il suono delle due corde ugualmente distanti ne giungerà una quantità relativa al numero intero di essi raggi; laonde il numero dei raggi stimolanti il sensorio serberà la proporzione di L : l.

V. All'orecchio situato in O pervengano i due raggi sonori DO, dO. Ci insegna la teorica della propagazione del suono contenuta nello Schediasma VIII. che le distanze fra le due coppie di punti aerei G, O; g, O, fra' quali i primi G, g compiuta una vibrazione siano ridotti in quiete, ed i secondi O, O effettuata per esempio una mezza vibrazione sien pervenuti alla massima velocità, sono proporzionali ai tempi delle oscillazioni delle corde ATA, afba. Ma questi tempi stanno come le lunghezze L, l di esse corde; dunque GO : gO :: L : l, e nella stessa proporzione altresì si riguarderanno le masse delle linee d'aria GO, gO. Se i punti estremi O, O dei raggi DO, dO urteranno nel timpano uditorio, resterà frastornato il moto delle linee aeree GO, gO, e quindi le porzioni delle masse dei raggi sonori DO, dO, che urtano nel sensorio, si riferiscono nella proporzione L : l. Si metta a computo il numero di raggi, che provengono dagli elementi De, de, e si troverà che le masse esercitanti impulso contro l'organo dell'udito stanno fra loro come $L^2 : l^2$.

VI. Abbiamo veduto che le velocità degli elementi aerei situati nei raggi DO, dO, mentr'essi elementi si trovano a distanze in ragione di C : c dalle metà delle loro oscillazioni, accettano la proporzione $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$; e perciò i quadrati delle mentovate velocità saranno proporzionali a $\frac{C^2}{L^2}$, $\frac{c^2}{l^2}$. Immaginiamoci distribuite la linea GO, gO in egual numero di particelle MI, mi, le cui lunghezze abbracceranno la ragione di GO : gO, o sia di L : l, supponendosi fra loro eguali le particelle alla stessa linea spettanti. Sia MO : mO :: GO : gO :: L : l,

e dei

e dai canoni della propagazione del suono siamo istruiti, che le particelle infinitesime MI, mi distano come C : c dal punto medio delle loro vibrazioni. Per conseguenza i quadrati delle loro velocità staranno come $\frac{C^2}{L^2} : \frac{c^2}{l^2}$: ma le masse delle particelle aeree MI, mi replicate tante volte, quanti raggi sonori posti in moto dagli elementi De, de delle corde giungono al sensorio, si corrispondono come $L^2 : l^2$; dunque gli aggregati delle predette masse sono dotati di forze vive proporzionali a $C^2 : c^2$. Potendosi la stessa cosa asserire di tutte le particelle uguali ad MI, mi, e situate o più vicine al punto O, o più lontane; ma sempre in distanze tali, che serbino la proporzione di GO : gO; ne segue che per cagione delle porzioni minime De, de delle corde AZB, azb l'aria urta nello orecchio con forze vive in ragione di $C^2 : c^2$. Un simile effetto producono gli altri elementi delle nostre corde simili nella lunghezza alle corde stesse, e similmente collocati; e perciò le corde intere AZB, azb della stessa materia, grossezza, e tensione, e impiegate per le saette C, c spingono l'aria di forze vive fornita proporzionali ai quadrati di esse saette contro lo organo dello udito. Replicandosi questi colpi ad ogni nuova vibrazione delle due corde, egli è manifesto che l'impressione, che ne riceve lo orecchio, serba la proporzione composta dei quadrati $C^2$, $c^2$, e dal numero delle vibrazioni fatte in tempo pari dalle due corde: ma il detto numero sta inversamente come i tempi, che in una oscillazione si impiegano, i quali tempi si riferiscono nella ragione L : l; dunque le impressioni sostenute dal sensorio accettano la proporzione $\frac{C^2}{L} : \frac{c^2}{l}$.

VII. Acciocchè divengano uguali le mentovate impressioni, egli è di uopo moltiplicare il numero delle corde AZB, azb in ragione delle grandezze $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$; o pure con equivalente artifizio far sì, che le grossezze delle corde siano

come

come $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$, e che le forze o pesi tendenti P, p si riguardino nello stesso rapporto. Le masse di tali corde, e conseguentemente anco quelle degli elementi Da, da serbano la ragione $\frac{L^2}{C^2} : \frac{l^2}{c^2}$. Mentre le due corde si supponevano di egual grossezza, ho fatta l'osservazione, che gli elementi analoghi Da, da distanti dalla linea retta BA, ba in proporzione di C : c si movono con velocità in ragione di $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$. Lo stesso si verifica di due corde inegualmente grosse, stirate da pesi proporzionali alla loro grossezza, ed incurvate di modo che le ordinate in siti analoghi stiano come C : c; mercè che equivalgono esse a due aggregati di corde di pari grossezza. Moltiplicando le masse degli elementi Da, da, che stanno come $\frac{L^2}{C^2} : \frac{l^2}{c^2}$ per i quadrati delle rispettive velocità, che stanno come $\frac{C^2}{L^2} : \frac{c^2}{l^2}$, ne risultano prodotti eguali; che dinotano l'egualtanza delle forze vive degli elementi Da, da. Un pari discorso si adatti a tutte l'altre coppie di particole, nelle quali si adempiano le medesime condizioni, onde vanno forniti gli elementi Da, da, e si inferisca che quando le corde AFB, afb, le cui grossezze si corrispondano nella proporzione delle grandezze $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$, distano come C : c dalla linea retta AB, ab, vengono da pari forze vive animate.

VIII. Dovendosi queste corde nelle loro oscillazioni allontanare in siti analoghi aD, ad dalle linee rette AB, ab in ragione di C : c, impareremo dal numero VII. dello Schediasma IV. che gli elementi Da, da sono stimolati da forze acceleratrici, che stanno come $\frac{CP}{LM} : \frac{cp}{lm}$, chiamata M, m la massa delle due corde. Si moltiplichino le dette quantità per M, m grandezze proporzionali alla massa degli elementi Da, da, e ci si affacceranno le frazioni $\frac{CP}{L}$, $\frac{cp}{l}$, che esprimeranno la ragione delle forze sollecitanti le

particelle

particelle Dd, da: ma per la stabilita analogia $P : p :: \frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$; dunque sostituendo in cambio di $P$, $p$, le grandezze proporzionali $\frac{L}{C^2}$, $\frac{l}{c^2}$, troveremo che gli elementi Dd, da, le cui distanze dai punti estremi B, b serbino la proporzione delle lunghezze AB, ab delle corde, sostengono la sollecitazione di forze, che stanno inversamente come le massime saette CF, cf delle corde stesse, cioè a dire come $\frac{1}{C} : \frac{1}{c}$.

IX. Raccogliendo in poche parole le cose a lungo spiegate, dico che due corde della stessa materia, incurvate oscillando sino alla massima saetta C, c, stimolate in siti analoghi da forze sollecitanti come $\frac{1}{C} : \frac{1}{c}$, tese da pesi proporzionali alle grossezze, e grosse in ragione di $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$, sono fornite di pari forze vive, e producono suoni egualmente forti.

X. Resta che si determini la proporzione in cui si debbono riferire le massime saette C, c, acciocchè i suoni delle corde AB, ab riescano del pari aggradevoli. Io stabilisco due limiti, fuori dei quali non si dee certamente svagare, cioè a dire che la corda grave non sia più sottile della acuta e che questa non trascorra oscillando uno spazio maggiore di quello, per cui si move la corda grave.

Se da un canto le due corde sono egualmente grosse, si avrà $\frac{L}{C^2} = \frac{l}{c^2}$, e per conseguenza $C : c :: \sqrt{L} : \sqrt{l}$, cioè stan le massime saette C, c in ragione dimezzata delle lunghezze L, l delle corde. In questo incontro le grossezze delle nostre corde stanno come $L^0 : l^0$. Nomino T, t i tempi delle vibrazioni delle corde AB, ab, e U, u le velocità degli elementi Dd, da, mentre le loro distanze dalle linee rette AB, ab serbano la ragione di C : c. Abbreviando le dette velocità la general proporzione $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$, se

in

65

in cambio di $C$, e sostituiremo le grandezze nel caso presente proporzionali $\sqrt{L}$, $\sqrt{l}$, troveremo $U$, $u$ come $\frac{1}{\sqrt{L}}$, e $\frac{1}{\sqrt{l}}$; come rispettivamente nelle corde tese da pesi in ragione delle basi, i tempi $T$, $t$ delle oscillazioni si riguardano come $L$, e $l$; dunque $U : u :: \frac{1}{\sqrt{T}} : \frac{1}{\sqrt{t}}$, cioè a dire le descritte velocità delle due corde $AB$, $ab$ ugualmente grosse in proporzione inversa dimezzata dei tempi $T$, $t$ delle vibrazioni.

XI. Passo al limite opposto, e suppongo $\mathcal{L} = \mathcal{l}$. In tale circostanza si scoprivanno le grossezze delle corde $\frac{L}{C^2}$, e $\frac{l}{c^2}$ proporzionali alle lunghezze $L$, $l$; canone stabilito dal celebratissimo Signor Leonardo Eulero nella sua Opera Tentamen novae theoriae musicae pag. 11. In riguardo alle velocità $U$, $u$ si adempirebbe l'analogia $U : u :: \frac{1}{L} : \frac{1}{l} :: \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$, la quale ci insegnerà, che esse accettano la ragione reciproca o delle lunghezze $L$, e $l$ delle corde, o dei tempi $T$, $t$ delle loro vibrazioni.

XII. In quegli stromenti, nei quali assegnandosi a ciascun suono la sua corda particolare c'è un pieno arbitrio, l'parte si tiene di mezzo fra i due confini estremi. Di tal natura sono i gravicembali, che nel numero XVII. e nei seguenti mi serviranno di esempio.

XIII. Non lasciano la scelta libera gli stromenti, in cui una corda stessa rende più suoni col mezzo delle dita della mano sinistra, che in diversi siti la premono. La pressione accorcia più o meno la corda, e fa sì che più corde differenti solo nella lunghezza producano suono. Egli è di uopo adunque ricorrere al limite in primo luogo ricordato, se vogliamo che i suoni cagionino negli orecchi una impressione ugualmente forte. Nel Violino a cagion di esempio la corda intera, e le sue porzioni.

Di

di lunghezza diversa determinate dal dito premente acquistano pari forze vive $MU^2$, $mu^2$ per cagione della costante azione dello arco. Avremo pertanto $U : u :: \frac{1}{\sqrt{M}} : \frac{1}{\sqrt{m}}$; ma essendo le corde ugualmente grosse, e tese $M : m :: L : l :: T : t$; dunque $U : u :: \frac{1}{\sqrt{T}} : \frac{1}{\sqrt{t}}$, conforme ricavai il limite nominato.

XIV. Benchè abbia sopra supposto, che le forze tendenti siano proporzionali alle grossezze delle corde; se procedendo con maggiore generalità, non avessi ristretti i pesi stiranti alla detta legge, nulladimeno con un simile giro di raziocinio sarei pervenuto alla conseguenza, che due corde fornite di eguali forze vive rendono suoni ugualmente forti. In fatti i suoni del violino prodotti da corde animate come vedremo da eguali forze vive riescono di pari vigore, quantunque le forze tendenti non serbino la ragione delle grossezze delle corde. Ho abbracciata la nominata ipotesi, perchè questa deve verificarsi almeno prossimamente negli strumenti più perfetti, nei quali le speziali circostanze non obbligano gli Artefici a regolarsi diversamente.

XV. Faccio ritorno al violino, e giacchè il nostro strumento è guarnito di quattro corde ugualmente lunghe, e variamente grosse, stimo opportuna cosa l'indagare qual proporzione debba assegnarsi alle diverse grossezze, acciocchè passando da corda a corda si conservi la legge $U : u :: \frac{1}{\sqrt{T}} : \frac{1}{\sqrt{t}}$, e ritenendo i suoni la stessa indole, l'orecchio non si accorga che il suono piuttosto da una corda, che dall'altra provengano, egli è di uopo premettere, che

che quantunque l'arco tocchi una maggiore superficie nelle corde più grosse, nulladimeno la sua azione è costante, purchè si usi una pari forza a premer l'arco sopra le corde. Questa forza si distribuisce ugualmente a tutte le parti toccate, e quindi due particelle uguali in corde differenti soffrono pressioni in ragione inversa delle totali superficie combaciate dall'arco. Facendo l'arco sonar le corde per via di fregamento, ed essendo questo in proporzione composta della pressione sostenuta da particole uguali, che sta reciprocamente come le intere superficie, e del numero d'esse particole, che sta direttamente come le intere superficie, ne segue che il fregamento è pari rispettivamente a tutte le corde, e che l'azione dell'arco è costante.

Ciò dimostrato, egli è chiaro, che le diverse corde concepiranno eguali forze vive $MU^2$, $mu^2$, onde si abbia $U : u :: \frac{1}{\sqrt{M}} : \frac{1}{\sqrt{m}}$: ma si vuole parimente, che si verifichi l'analogia $U : u :: \frac{1}{\sqrt{T}} : \frac{1}{\sqrt{t}}$; dunque $M : m :: T : t$. E perchè nel caso presente le masse delle corde, che sono della stessa materia, ed egualmente lunghe, serbano la ragione delle grossezze, troveremo che queste debbono riferirsi nella ragione dei tempi delle vibrazioni. Due corde prossime del violino formano quinta, e perciò $M : m :: T : t :: 3 : 2$, proporzione, in cui debbono riferirsi le grossezze di due corde vicine nel mentovato stromento.

XVI. La seguente sperienza ci additerà quanto la pratica si conformi alla teorica. Colle bilancette dell'oro pesai tre porzioni egualmente lunghe piedi $1\frac{1}{2}$ Veneziani delle tre corde del violino, che si chiamano il tenore, il canto, ed il cantino. Trakoscrai

go

Tralascerò d'indagare il peso della corda più grave, perchè questa non è come l'altre di sola minugia, ma suole ricoprirsi con un sottil filo di rame. Pesò adunque il tenore grani 15, il canto grani 10, ed il cantino grani 6. Essendo le corde del pari lunghe, le grossezze stanno come i pesi. Le grossezze per tanto del tenore, e del canto si corrispondevano esattamente nella ragione di 3 a 2. Le grossezze del canto, e del cantino si avvicinavano ad una tale proporzione, la quale si sarebbe trovata giusta, se il cantino avesse pesato grani $6\frac{2}{3}$ in cambio di grani 6. Trattandosi di corde di minugia, che sono soggette a moltissime imperfezioni, io non credo che si possa pretendere fra la teorica, e la pratica una più aggiustata conformità, e ciò tanto più, quanto che il cantino, siccome asseriva un perito Sonatore, era un po' troppo sottile.

XVII. Mi accingo presentemente a provare, che le corde dei gravicembali acquistano oscillando eguali forze vive, e che di più le loro grossezze, e velocità accettano una ragione media, quella fra $L^{\circ} : l^{\circ}$, $L : l$, e questa fra $\frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{L} : \frac{1}{l}$.

Per far sonare le corde dei nostri stromenti, si usano penne a un di presso egualmente rigide, e si adopra di più l'artifizio di incitare al moto le corde gravi in un sito più prossimo all'appoggio di quello porti la proporzione delle loro lunghezze. Si rende adunque necessario il determinare la saetta cagionata da una forza minima, la quale si applichi a qualunque punto di una data corda.

XVIII. La forza DC (fig. 24.), la cui direzione sia normale alla retta AB, stia in equilibrio colla corda ADB, e la tenga ripiegata, di maniera che il punto D

si allontani dalla linea AB per la saetta DH, di cui si cerca il valore. Continuo indefinitamente la linea BD, e pel punto C conduco la linea CG parallela a DA, la quale taglierà la retta AD nel punto G. Per un tal punto meno GE parallela ad AA, e conseguentemente perpendicolare a CH. La forza DC si risolve nelle due DG, GC, che tirano direttamente quella la corda BD, e questa la corda AD. In oltre la forza DG è composta dalle due equipollenti DE, EG, l'una normale, e l'altra parallela ad AB. Avverto che supponendosi minima la forza DC, non si altera fisicamente la tensione della corda, e perciò EG si adegua alla forza o peso tendente la detta corda AB mentre si trova in linea retta. Non altrimenti la forza GC equivale alle due EC, EG. La prima unita alla DE pareggia la forza DC, e la seconda l'ho già affermata eguale al peso tendente la corda AHB.

XIX. Per la similitudine dei triangoli DEG, DHB; CEG, DHA avremo le analogie

$GE : ED :: AH : HD = \frac{ED \cdot AH}{GE}$

$GE : EC :: AH : HD = \frac{EC \cdot AH}{GE}$. Si deduce essere $ED \cdot BH = EC \cdot AH$, equazione da cui si ricava l'analogia $ED : EC :: AH : BH$, la quale c'insegna, che le forze ED, EC opponentisi, quella alla corda BD, questa alla corda AD stanno fra loro in ragione inversa delle lunghezze BH, AH di esse corde, mentre la corda intera AB si ritrovava in linea retta. Conciossiaché $ED : EC :: AH : BH$, avremo componendo $ED + EC = DC : EC :: AH + BH = AB : BH$, e perciò $EC = \frac{DC \cdot BH}{AB}$.

In cambio di EC si sostituisca il suo valore nella superiore equazione $HD = \frac{EC \cdot AH}{GE}$, e scopriremo essere $HD = \frac{DC \cdot BH \cdot AH}{AB \cdot GE}$. La stessa conseguenza si incontrerebbe cercando

prima

prima il valore di $QD = \frac{DC \cdot AH}{AB}$, e sostituendolo poscia nella formola $HD = \frac{QD \cdot BH}{GQ}$.

Si chiami la lunghezza della corda AB $= L$, il peso tendente $GQ = P$, la forza $DC = F$, la saetta $HD = S$, la porzione della corda $BH = KL$, il residuo $AH = L - KL$, e ci si presenterà l'equazione
$S = \frac{F \cdot KL \cdot \overline{L-KL}}{LP} = \frac{K - K^2 \cdot FL}{P}$, la quale esprime il valore della saetta S corrispondente alla forza F applicata a qualsisia punto H della corda AB.

XX. Se $BH = KL$ si uguaglierà ad $\frac{1}{2}L$ metà della corda AB, la saetta $HD = S$ sarà la massima. Senza ricorrere al metodo dei massimi e dei minimi, si osservi nella formola $S = \frac{F \cdot KL \cdot \overline{L-KL}}{LP}$, che in riguardo alla stessa corda la quantità $\frac{F}{LP}$ è costante, e che per conseguenza il valore di S è proporzionale al rettangolo $KL \cdot \overline{L-KL}$, cioè a dire al rettangolo BHA: ma i rettangoli BHA hanno costante la somma $BH + HA = L$ dei lati, che li producono, e fra sì fatti rettangoli il massimo si è quello, che nasce dalla moltiplicazione dei lati eguali BH, HA; dunque il massimo valore di S corrisponderà al punto medio H della corda AB.

Se il punto H coinciderà colli uno, o colli altro punto estremo B, A, onde o $BH = KL$, o $HA = L - KL$ si eguagli a nulla, sarà parimente nulla la saetta $HD = S$.

Persistano costanti la lunghezza, la tensione della corda AB, il punto H, in cui si stimola al moto, e troveremo le saette proporzionali alle forze.

Paragonate insieme diverse corde, se i

punti

punti H, a cui si applicano le penne saranno analoghi; di modo che AH = KL sia sempre una simile porzione della lunghezza AB = L, la specie K avrà un valore costante. Data K, sarà altresì data la quantità $K - K^2$, e però le saette S si scopriranno come $\frac{7L}{P}$. Incitate adunque al tremito due corde in siti analoghi, le saette stanno in ragione composta, diretta delle forze 7, con cui si stimolano, e delle lunghezze L, ed inversa delle forze tendenti P.

Che se in oltre si assumerà costante la forza 7, si troverà S proporzionale ad $\frac{L}{P}$, vale a dire le saette direttamente come le lunghezze L, e reciprocamente come i pesi tendenti P.

XXI. Sintantochè la resistenza della corda è minore della rigidità della penna, seguita questa a via più ripiegarla. Giunte tali forze alla equalità, o per meglio dire superando la resistenza della corda per una quantità minima la rigidità della penna, si mette subito la corda in oscillazione. Perciò la resistenza della corda ADB s'eguaglia alla forza DC = 7. Segno DI = DC = 7 perpendicolare a DH, e condotta la diagonale HI, da qualunque punto O medio fra D, ed H descrivo ON parallela a DI. Avendo io provato che essendo il resto pari, le saette serbano la ragione delle forze; chiaramente si scopre, che per piegare la nostra corda alla saetta HO, si richiede la forza ON: ma siccome ho testè fatta la riflessione, la resistenza della corda nella positura AOB pareggia la forza ON; dunque il triangolo HDI è la scala delle resistenze della corda, ed all'aja di esso triangolo si eguaglia la reazione esercitata dalla corda, mentre è passata dalla linea retta AHA alla situazione ADB. Quantunque la corda messa in libertà non mantenga la figura triangolare ADB, AOB,

nondimeno

nondimeno restituita che siasi alla linea retta AHB., ha effettuata una somma di azioni eguali alla predetta trazione, o sia all'aja HDI, a cui per conseguenza s'agguaglia la forza viva acquistata. E giacchè l'aja HDI è proporzionale al prodotto ID . DH = IS, ne segue che la nominata forza viva serba la ragione di IS. In cambio di S si sostituisca il valore sopra determinato $\frac{I.KL.\overline{L-KL}}{LP}$, e si troverà essere la forza viva della corda AHB ritornata in linea retta come $\frac{I^2.KL.\overline{L-KL}}{LP}$.

Abbiasi un'altra corda ab, rispettivamente a cui sia ab = l, bh = kl, ah = l - kl. dc = f, la forza tendente = p, e la sua forza viva nell'istante che ha fatto ritorno alla linea retta ahb sarà proporzionale ad $\frac{f^2.kl.\overline{l-kl}}{lp}$.

XXII. Acciocchè le due corde rendano suoni egualmente forti, fa d'uopo che passando eguaglianza fra le loro forze vive, si verifichi l'equazione $\frac{I^2.KL.\overline{L-KL}}{LP} = \frac{f^2.kl.\overline{l-kl}}{lp}$.

Adoprandosi in riguardo ad ambo le corde la stessa forza, cioè a dire essendo I = f, vale la formola $\frac{KL.\overline{L-KL}}{LP} = \frac{kl.\overline{l-kl}}{lp}$.

Finalmente stimolate le corde coi pesi forze in siti analoghi, onde sia K = k, l'equazione prende il semplice aspetto $\frac{L}{P} = \frac{l}{p}$, dal quale apprendiamo, che in tali circostanze le corde concepiranno eguali forze vive, e produrranno suoni egualmente forti, quando i pesi tendenti P, p serbino la ragione delle lunghezze L, l. S'aggiunga la condizione, che i pesi tendenti siano proporzionali alle grossezze delle corde, e ne risulterà il canone stabilito dal Signor Eulero, che le grossezze della

delle corde debbano corrispondersi nella ragione 65
della loro lunghezza. Per dire il vero il lodato Autore ha supposto, senza consultare la pratica, che in punti analoghi si faccian sonare le corde. Accoppiata questa ipotesi colle altre due comprovate almeno prossimamente dall'uso, che le forze incitanti al tremito siano eguali, e che le tensioni siano come le grossezze delle corde, ci guida necessariamente al canone mentovato, quando sia nostra mira, che le corde ugualmente vigorosi rendano i suoni.

XXIII. Discendendo dalla teorica alla pratica, osservo che la lunghezza delle corde $AB = L$, $ab = l$, le distanze $BH = kL$, $bh = kl$ fra lo appoggio e la penna che fa sonare, le distanze $HA = L - kL$, $ha = l - kl$ fra la penna e l'altro appoggio si rendono esattamente note con diligente misura. La legge dei tempi delle vibrazioni delle corde espressa dall'analogia $\frac{LM}{P} : \frac{lm}{p} :: T^2 : t^2$ serve a scoprire la proporzione fra le forze tendenti $P : p :: \frac{LM}{T^2} : \frac{lm}{t^2}$. La ragione fra le masse delle corde si trova pesandole, e la relazione fra i tempi $T$, $t$ ci è resa palese dall'armonia, che producono le due corde sonando, la quale gioverà molto che sia una equisonanza, cioè a dire un'ottava o semplice, o multipla; perchè sendo queste perfettamente accordate nei gravicembali, ne sappiamo la vera puntuale proporzione.

Le forze $F$, $f$, con cui si fanno sonare le corde, le determineremo col calcolo, e mentre ce le dia adequatamente uguali, siccome l'uso richiede, caveremo a buon conto la conseguenza, che le dette corde acquistano oscillando uguali forze vive, e che perciò producono suoni egualmente forti.

La relazioni fra le grossezze delle corde, fra le loro velocità, dalle quali dipendono i suoni
del

del pari grati; le anderò opportunamente notando, secondochè mi si presenterà l'occasione.

XXIV. In un gravicembalo lavorato da Vito de' Trasuntini l'anno 1559. due corde sonavano il C sol fa ut, e si corrispondevano in tripla ottava, rispettivamente a cui i tempi $T$, $t$ delle vibrazioni delle due corde stanno come $8 : 1$, ed i loro quadrati $T^2 : t^2 :: 64 : 1$.

Trovai $L =$ once $33 - \frac{1}{6}$, $l =$ once $4 + \frac{1}{4}$, le quali misure sono espresse in once del piede Veneto. Moltiplicando, e dividendo il tutto per 12, ne risulta $L = \frac{394}{12}$, $l = \frac{51}{12}$, cioè a dire tralasciato il comun divisore 12, $L : l :: 394 : 51$, proporzione fra le lunghezze delle corde contrassegnate co' numeri interi. Noto che la ragione di $L : l :: 394 : 51 :: 7 + \frac{37}{51} : 1$ è più vicina di quella fra i tempi delle vibrazioni $8 : 1$.

Cinque piedi della corda grave pesavano grani 20; ed altrettanti piedi della corda acuta pesavano grani 6; e perciò le grossezze delle corde serbavano la proporzione di $10 : 3$, o sia di $3\frac{1}{3} : 1$, la quale è media fra le due di limite sopra determinate $L^0 : l^0$, $L : l$, e molto si accosta alla seguente $L^{\frac{7}{12}} : l^{\frac{7}{12}}$, della qual verità chi legge si può accertare coll'ajuto dei logaritmi.

Stando le masse delle corde della stessa materia in ragion composta delle loro lunghezze e grossezze, scopriremo essere
$M : m :: 3940 : 153 :: 25\frac{115}{153} : 1$.

Nell'analogia $P : p :: \frac{LM}{T^2} : \frac{lm}{t^2}$ sostituisco invece di $L$, $l$; $M$, $m$; $T$, $t$ i ritrovati proporzionali valori, e mi si presenta la ragione tra le forze tendenti.
$P : p :: \frac{1552360}{64} : 7803$, o sia

$p$

$P : p :: 194045 : 62424 ::$ 3 + $\frac{6773}{62424}$ ovvero la frazione $\frac{6773}{62424}$ decresca pochissimo da $\frac{1}{9}$, e quindi prossimamente $P : p :: 3 + \frac{1}{9} : 2$. Si osservi la forza $3\frac{1}{9}$ stirante la corda grave alquanto minore di quello richiede la proporzione della sua base $3\frac{1}{3}$; e si cavi la conseguenza, che le fibre della corda grave erano un po meno tese delle fibre della corda acuta.

Mi insegnò in oltre la misura $KL$ = once [illegible] $= \frac{44}{12}$; $kl$ = once $1\frac{3}{4} = \frac{21}{12}$, e perciò ommesso, come si è fatto anche rispettivamente alle totali lunghezze $L$, $l$, il comune divisore 12, $KL : kl :: 44 : 21$. Avverto essere $L - KL : l - kl :: 394 - 44 = 350 : 51 - 21 = 30$.

XXV. Nella formola $\frac{T^2 \cdot KL \cdot \overline{L-KL}}{LP} = \frac{t^2 \cdot kl \cdot \overline{l-kl}}{lp}$ pongasi

$L = 394$, $KL = 44$, $L - KL = 350$

$l = 51$, $kl = 21$, $l - kl = 30$

$P = 194045$, $p = 62424$, ed adempiuti i necessarj computi si troverà

$$\frac{T^2}{1337940275} = \frac{t^2}{1464211472},$$

ed estratta la radice quadrata

$$\frac{T}{36577} = \frac{t}{34323},$$ cioè prossimamente

$T : t :: 21 : 22$.

Ecco adunque adempiuta la condizione suggeritaci dalla esperienza, che le forze $T$, $t$ sieno prossimamente uguali. Resta confermato per tanto, che le corde gravi ed acute di un gravicembalo rendono suoni del pari forti, perchè nello oscillare di uguali forze vive fanno lo acquisto. Allo adempimento più o meno esatto di una tal legge corrisponderà in riguardo allo ugual vigore de' suoni la maggiore o minore perfezione dello stromento

mento :: Se la grossezza della corda grave si fosse trovata $3\frac{2}{3}$ in cambio di $3\frac{1}{3}$, ne sarebbe risultata dal calcolo una perfetta agguaglianza delle forze $F, f$.

XXVI. Giacchè le nostre corde di pari forze ora sono fornite, le loro velocità staranno inversamente come le radici delle masse, onde s'abbia $U : u :: \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$: ma le masse serbano la ragione composta delle lunghezze e delle grossezze d'essa corde, e le grossezze le abbiamo scoperte come $L^{\frac{7}{12}} : l^{\frac{7}{12}}$; dunque $M : m :: L^{\frac{19}{12}} : l^{\frac{19}{12}}$, e conseguentemente $U : u :: \frac{1}{L^{\frac{19}{24}}} : \frac{1}{l^{\frac{19}{24}}}$; proporzione, che sta quasi esattamente di mezzo fra quelle di limite sopra stabilite $\frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{L} : \frac{1}{l}$. Avendoci mostrato il computo al numero XXIV. $M : m :: 25\frac{115}{153} : 1$, c'insegna altresì essere $U : u :: \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} :: \frac{1}{5\frac{115}{1530}} : 1$, cioè a dire le velocità di due corde grave, ed acuta, che si corrispondono in tripla ottava, prossimamente come $1 : 5$.

XXVII. Non vogliono trascurarsi alcune riflessioni importanti. In tutti i gravicembali, e le spinette da me esaminati, poste al paragone le corde gravi colle acute, le ho ritrovate alquanto più corte di quello richiede la proporzione fra i tempi delle loro vibrazioni. Da ciò ne deriva la conseguenza, che le corde gravi rispettivamente alla loro grossezza sono un po' meno tese delle corde acute. Io credo che i Pratici così si adoperino, perchè la trafila, per cui si fan passare le corde, costipi e renda tenaci più le sottili delle grosse, di modo che queste non possano tollerare la tensione di una forza alla loro grossezza precisamente proporzionale. Corrono in oltre pericolo le corde gravi di scavezzarsi, mentre si attorcigliano per attaccarle allo stromento, e si rivolgono

volgono

volgono intorno al perno, col mezzo del quale si stirano. Per altro sfuggiti i descritti rischi, e ridotte alla dovuta tensione, si conservano molto tempo senza spezzarsi. Le corde acute all'opposto durano poco, e si rompono facilmente.

XXVIII. Usandosi per far sonare le varie corde forze a un di presso costanti, le corde gravi per lo stiramento dalla penna prodotto sono meno prossime a rompersi delle acute. Egli è noto, che due corde tese con pesi proporzionali alle loro tenacità si espongono a pari cimento di spezzarsi, quando gli allungamenti cagionati dalle forze $F$, $f$ serbano la ragione delle lunghezze di esse corde. Considero (fig. 26) le porzioni meno lunghe $BH$, $bh$ delle corde $AB$, $ab$; perchè agendo contro ad esse una parte della forza $DC$, $dc$ maggiore di quella, che si esercita contro le porzioni più lunghe $AH$, $ah$, le prime si scavezzano più facilmente delle seconde. Fatto centro nei punti $B$, $b$, coi raggi $BH$, $bh$ si descrivano gli archi $HQ$, $hq$, i quali determineranno le linette $DQ$, $dq$ eguali alle distensioni sofferte dalle corde $BH$, $bh$. Giacchè si vuole, che i mentovati allungamenti stiano come le lunghezze $BH = KL$, $bh = kl$, saranno parimente come le dette lunghezze le saette $HD$, $hd$, i di cui quadrati si agguagliano ai rispettivi rettangoli $\overline{2BQ+QD} \cdot QD$, $\overline{2bq+qd} \cdot qd$. Avendo per mano le formole, che generalmente esprimono i valori delle saette $S = \frac{F \cdot KL \cdot \overline{L-KL}}{LP}$, $s = \frac{f \cdot kl \cdot \overline{l-kl}}{lp}$, le quali ci insegnano, che allora si adempierà l'analogia $S : s :: KL : kl$, quando sia $\frac{F \cdot \overline{L-KL}}{LP} = \frac{f \cdot \overline{l-kl}}{lp}$. Sostituisco in cambio di $L-KL$, $L$, $P$; $l-kl$, $l$, $p$ i convenienti valori sopra determinati, ed effettuate le debite

debite operazioni, mi si presenta l'analogia
$F : f :: 38 \; a \; 66\,50 :: 1635\,48\,944$;
che si approssima alla seguente
$F : f :: 1 \; a \; \frac{1}{12}$ incirca.

Se adunque la forza $F$, $f$, che fanno sonare le due corde grave ed acuta, che nel mentovato stromento del Trasuntini si corrispondevano in triplice ottava, fossero come $1$ a $\frac{1}{12}$ ecc., gli allungamenti $AD$, $ad$ delle porzioni meno lunghe $AH$, $ah$ di esse corde serberebbero la ragione delle lunghezze $AH$, $ah$ delle dette porzioni; le quali perciò correrebbero egual rischio di rompersi, purchè per altro le due corde, come io suppongo, fossero del pari allo spezzarsi proclivi, prima che le penne le stimolassero al tremito; ma per incitare al suono le due corde, si adoprano forze fisicamente uguali, e la corda grossa è proporzionatamente meno tesa dell'acuta; dunque è molto rimoto il pericolo, che si scavezzi la corda grave nell'atto di porla in oscillazione.

XXIX. Non è arbitrario l'armare uno stromento con corde di qualunque grossezza, ed armato che sia l'usar forze a capriccio per far sonare esse corde. L'esperienza uniforme alla teorica ha insegnato ai Pratici le convenienti grossezze delle corde gravi ed acute, le quali surrogando il prossimo all'esatto, possono stare dentro certi discreti limiti. Applicate allo stromento due corde di congrua grossezza, resta l'altro mezzo della forza delle penne, per interamente pareggiare il vigore dei suoni. Toccando gli Accordatori nello stesso tempo due corde, comprendono esattamente qual penna debba accrescersi, o scemarsi di forza, perchè i due suoni grave, ed acuto facciano nell'orecchio eguale impressione.

Determinare

Determinare la misura, che debbono assegnarsi alle canne di organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli.

XXX. Colla scoperta delle verità poste in chiaro rispettivamente alle corde, si determinano agevolmente le misure, che deggiono assegnarsi alle canne di organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli. La stessa analogia $T : t :: \sqrt{\frac{LM}{P}} : \sqrt{\frac{lm}{p}}$ dà legge ai tempi delle ~~contemporanee~~ vibrazioni e delle corde sonore, e delle canne di organo. Relativamente a queste ultime significano $L$, $l$ le lunghezze delle corde di aria nelle canne rinchiuse, le quali corde, non giova per ora il supporle o rettilinee, o similmente tortuose, onde le loro lunghezze sieno eguali, o proporzionali a quelle delle canne misurate dalla bocca sino alla estremità superiore. $M$, $m$ dinotano le masse delle mentovate corde, e $P$, $p$ i pesi delle colonne ~~soprastanti~~ di aria soprastanti alle canne, i quali colle loro pressioni rendono elastiche le nostre corde. Nella medesima stagione, e costituzione di aria i pesi $P$, $p$ stanno come le grossezze, o basi delle corde aeree contenute nelle canne, e le dette basi come $\frac{M}{L} : \frac{m}{l}$. Sostituiti per tanto nella soprascritta analogia sì fatti valori proporzionali in cambio di $P$, $p$, avremo $T : t :: L : l$, cioè a dire nelle addotte circostanze i tempi delle vibrazioni di due canne di organo come le lunghezze $L$, $l$ delle corde aeree da esse canne comprese.

XXXI. I numeri delle funicelle aeree di pari grossezza, che dentro le canne si

pongono

pongono in oscillazione, seguono la ragione delle basi $\frac{M}{L}$ : $\frac{m}{l}$ delle corde di aria, che le paion dalle canne circondate, e la stessa analogia parimente accettano i numeri de' raggi sonori, che si diffondono sfericamente intorno le canne; i quali raggi altro non sono, che una continuazione delle cordicelle or or nominate. La quantità dei raggi sonori, che pervengono all'udito egualmente dalle due canne distante sono proporzionali ai numeri totali di essi raggi, e per conseguenza stanno come $\frac{M}{L}$ : $\frac{m}{l}$.

XXXII. Per le cose dimostrate al numero V. le masse di due raggi sonori di due canne spettanti, che urtano nell'orecchio si riferiscono nella ragione di $T:t$, o sia nel nostro caso di $L:l$. Moltiplicando adunque le masse come $L:l$ di ciascun raggio, che colpisca il sensorio, pel numero de' raggi come $\frac{M}{L}$ : $\frac{m}{l}$, che nello stesso fanno impressione, ne risulta la relazione $M:m$ fra le intere masse, che contro l'organo dell'udito si spingono, le quali stanno come le masse delle corde aeree contenute dentro le canne.

XXXIII. I suoni riescono egualmente forti, allora quando l'aria urta nell'orecchia con forza viva in ragione di $T:t$, che in riguardo alle canne di organo si agguaglia a quella di $L:l$; imperciocchè moltiplicandosi gli impulsi secondo i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari, i quali stanno come $\frac{1}{T}$ : $\frac{1}{t}$, ne risultano nel sensorio eguali impressioni. Si chiamino $U$, $u$ le velocità in siti analoghi, e per esempio le massime, che prima dentro le canne, ed indi al di fuori acquistano oscillando le particole aeree se-

giusta

giusta quanto si è provato, l'aria colpirà il sensorio con forze vive proporzionali ad $MU^2$, $mu^2$: ma queste forze deggiono abbracciare la relazione $L : l$; dunque $MU^2 : mu^2 :: L : l$, e conseguentemente $\sqrt{\frac{M}{L}} : \sqrt{\frac{m}{l}} :: \frac{1}{U} : \frac{1}{u}$.

Le quantità $\frac{M}{L}$, $\frac{m}{l}$ dinotano le grossezze, o basi delle corde di aria contenute dentro le canne, e le loro radici serbano la ragione dei diametri di esse corde, o pure delle canne, che io nomino $D$, $d$. Averemo pertanto $D : d :: \frac{1}{U} : \frac{1}{u}$, e ne ricaveremo, che i diametri delle canne di organo deggiono corrispondersi nella proporzione reciproca delle velocità $U$, $u$, colle quali l'aria si vibra agitata dal fiato, che fa sonare la canna.

XXXIV. Se le forze del fiato si esprimano per $F$, $f$, comprimeranno esse l'aria nelle canne rinchiusa per ispazj come $\frac{FL}{D^2} : \frac{fl}{d^2}$.

Le azioni di tali forze proporzionali alle forze vive $MU^2$, $mu^2$ accetteranno la relazione $\frac{F^2L}{D^2} : \frac{f^2l}{d^2}$: e giacchè $MU^2 : mu^2 :: L : l$, sarà parimente $\frac{F^2L}{D^2} : \frac{f^2l}{d^2} :: L : l$; analogia, da cui si deduce $F : f :: D : d$, cioè a dire che le forze del fiato hanno da riferirsi nella ragione dei diametri delle canne.

XXXV. Ricavasi dalla esperienza contenuta nei numeri XXIV. e XXV. che si conforma colla teorica, e dai discorsi espressi nei numeri precedenti, che le corde di un gravicembalo del Trasuntino, i cui suoni riescivano egualmente gravi, spingevano contro l'orecchio masse di aria proporzionali a $T^{\frac{31}{12}}$, $t^{\frac{31}{12}}$ con velocità in ragione di $\frac{1}{T^{\frac{19}{24}}}$, $\frac{1}{t^{\frac{19}{24}}}$. Queste canone o

esattamente

esattamente, o prossimamente dee valere in tutti gli stromenti perfetti, nei quali le circostanze particolari non astringono gli Artefici ad operare diversamente. Si rifletta che i suoni vengono sempre portati all'orecchio dall'aere, e che non c'è motivo, per cui quella tal proporzione fra la massa aerea, che colpisce il sensorio, e la velocità con cui lo colpisce, piaccia in un caso, e nell'altro no. Avendo dimostrato essere le masse dell'aria, che agitate dalle canne di organo urtano nell'orecchio, come $M : m$, o sia come $LD^2 : ld^2$, e di più $T : t :: L : l$, $U : u :: \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$, ne dedurremo la analogia $M : m :: LD^2 : ld^2 :: TD^2 : td^2 :: T^{\frac{31}{12}} : t^{\frac{31}{12}}$, $U : u :: \frac{1}{D} : \frac{1}{d} :: \frac{1}{T^{\frac{19}{24}}} : \frac{1}{t^{\frac{19}{24}}}$, amendue le quali determinano la ragione fra i diametri delle canne $D : d :: T^{\frac{19}{24}} : t^{\frac{19}{24}}$, e fra le loro basi proporzionali ai quadrati dei diametri $D^2 : d^2 :: T^{\frac{19}{12}} : t^{\frac{19}{12}}$.

XXXVI. Non trascuro di notare la proprietà, che se le velocità dell'aria soggiacciono alla stessa legge, le basi delle canne di organo, e le masse delle corde di un gravicembalo della stessa materia, e tese da pesi in ragione della loro grossezze accettano lo stesso rapporto $T^{\frac{19}{12}} : t^{\frac{19}{12}}$. E vaglia il vero nei gravicembali abbiamo trovato $M : m :: L^{\frac{19}{12}} : l^{\frac{19}{12}}$, e sostituendo in vece di $L$, $l$ le quantità proporzionali $T$, $t$, $M : m :: T^{\frac{19}{12}} : t^{\frac{19}{12}}$.

XXXVII. Misurai diligentissimamente coll'ajuto del Signor Liberale Marcuzzi valoroso Organista di questa Cattedrale la circonferenza proporzionale ai diametri di due canne, che sonavano il Fa ut, e si corrispondevano in tripla ottava. L'organo della nominata Chiesa è un'opera assai perfetta lavorata da

Urbano

Urbano da Venezia l'anno 1420. Stando 65
[illegible], se quest'organo sia di accordo
col gravicembalo del Trasuntini, si dee trovare
D : d :: $8^{\frac{19}{24}}$ : 1. La grandezza $8^{\frac{19}{24}}$
si determina agevolmente o per via di loga-
ritmi, o col seguente semplicissimo artifizio.
Tre ottave constano di 36 semituoni. Si mol-
tiplichi 36 per 19, ed il prodotto dividasi per
24, onde ne risulti il quoziente 28½, numero
di semituoni, dai quali è formata quell'armonia,
la cui proporzione si adegua ad $8^{\frac{19}{24}}$ : 1. Avverto
che questi sono semituoni medj, ciascun de' quali
si agguaglia alla duodecima parte dell'ottava, ed
abbraccia prossimamente la ragione 18 : 17.
Compongono 28 semituoni una terza maggiore
crescente a un di presso $\frac{2}{3}$ di comma sopra la
doppia ottava. La terza maggiore giusta sopra
l'ottava raddoppiata si espone per 5 : 1;
o sia per [illegible], avvertendo $\frac{2}{3}$ di comma
detratti dalla ragione 121 : 120, ne segue
che 121 : 24 indica la terza maggiore au-
mentata $\frac{2}{3}$ di comma sopra la doppia ottava.
La metà di un semituono medio si esprime
pel rapporto 36 : 35. Si moltiplichino in-
sieme le due ragioni 121 : 24, 36 : 35 e ne
proverrà la relazione 363 : 70, ovvero
$5\frac{13}{70}$ : 1. Avremo pertanto $8^{\frac{19}{24}}$ : 1 ::
$5\frac{13}{70}$ : 1, proporzione in cui, per conformarsi
allo stromento del Trasuntini, si dovrebbero
corrispondere i diametri delle due canne. Tro-
var la circonferenza della canna grave linee del
piede Veneto 140, quella della canna acuta
linee 29, e quindi stava D : d :: 140 : 29
:: $5 - \frac{5}{29}$ : 1. Una tal proporzione è prati-
camente assai vicina alla $8^{\frac{19}{24}}$ : 1, bastando
calare la circonferenza 29 per due linee, ed il
corrispondente diametro per due terzi di linea,
acciocchè fra i diametri D, d vi passi l'esatta

fisica

fisica proporzione $4\frac{19}{24} : 1$.

XXXVIII. Egli è per altro vero, che la ragione 140 : 29 si accosta con molto maggior precisione alla seguente $4\frac{18}{24} = 4\frac{3}{4} : 1$. Moltiplicando 36 per $\frac{3}{4}$ ne proviene il numero di 27 semituoni mezzani, che determina la relazione $4\frac{3}{4} : 1$. Ci danno 27 semituoni medj una terza minore calante $\frac{2}{3}$ di comma in circa sopra la doppia ottava. La analogia 24 : 5, o sia 576 : 120 esprime la terza minore sopra l'ottava duplicata, e detraendo $\frac{2}{3}$ di comma indicati dalla ragione 121 : 120, rimane la proporzione 576 : 121 propria della terza minore scema $\frac{2}{3}$ di comma sopra la doppia ottava. Facciasi
$576 : 121 :: 140 : 29\frac{59}{144}$
il quarto termine dell'analogia c'istruisce, che accresciuta la circonferenza della canna acuta per meno di una mezza linea, i due diametri D, d si ridurrebbero alla precisa fisica proporzione $4\frac{3}{4} : 1$.

XXXIX. Per verificare con maggior sicurezza la corrispondenza fra il nostro strumento, e la legge $D : d :: T^{\frac{3}{4}} : t^{\frac{3}{4}}$, presi la misura di un'altra canna media fra le due mentovate, che alla più grave corrispondeva in ottava. Giacchè $T : t :: 2 : 1$, dovrà stare nel caso presente $D : d :: 2^{\frac{3}{4}} : 1$. Una ottava è formata da 12 semituoni medj, numero che moltiplicato per $\frac{3}{4}$ mi somministra il prodotto 9. La sesta maggiore crescente $\frac{2}{3}$ di comma dinotata dalla ragione 121 : 72 viene composta da 9 semituoni medj, e perciò dee adempiersi l'analogia $D : d :: 2^{\frac{3}{4}} : 1 :: 121 : 72$. La circonferenza della canna ultimamente misurata fu linee 64 un po' abbondanti. Si faccia

121

$121 : 72 :: 140 : 43 \frac{37}{121}$, e dal quarto termine imparavamo la molta esattezza, colla quale anche questa canna si adatta al canone $D : d :: T^{\frac{3}{4}} : t^{\frac{3}{4}}$.

XXXX. Al numero XXXIII. ho determinato essere $U : u :: \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$: ma $D : d :: T^{\frac{3}{4}} : t^{\frac{3}{4}}$; dunque $U : u :: \frac{1}{T^{\frac{3}{4}}} : \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$. Nei numeri X. ed XI. si sono per me stabiliti i limiti delle velocità delle vibrazioni gravi ed acute $U : u :: \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ $U : u :: \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$. Noti chi legge che il canone accettato dall' organo di Urbano si tiene perfettamente di mezzo, essendo la velocità $\frac{1}{T^{\frac{3}{4}}} : \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$ media geometrica fra le due $\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{T} : \frac{1}{t}$. In organi differenti si troveranno proporzioni diverse, ma quando tali stromenti sien lavorati da bravi Maestri, le velocità delle vibrazioni abbraccieranno una legge congruamente media fra le due estreme.

XXXXI. Si richiami a memoria aver io provato al numero XXXIV. che le forze $F$, $f$ del fiato, che fa sonare la canna, debbono corrispondersi nella ragione dei diametri $D$, $d$ di essa canna. Supposto che i ventilabri concedano lo ingresso libero all' aere dentro la parte inferiore delle canne, la forza del fiato serberà la proporzione delle quantità di aria, che passano per quella stretta apertura, cui si dà nome di bocca. Queste fessure si fanno egualmente larghe, e variamente lunghe in proporzione dei diametri delle canne, ed uscendo per esse quantità di aria in ragione dei diametri stessi, chiaramente si scopre, che le forze del fiato stanno come i diametri mentovati.

Composta l'anno 1815.

## Schediasma VII.

Delle due cagioni determinanti il Tuono negli stromenti naturali, ed artifiziali da fiato.

[illegible]

I. Il Tuono, o il tempo d'una vibrazione sonora negli stromenti naturali o artifiziali da fiato viene determinato da due cagioni; cioè o da quello ingegno, col quale si genera il suono, che io chiamerò rispettivamente ad alcuni stromenti imboccatura, o dalla lunghezza della corda di aria contenuta dentro il corpo di essi stromenti. Obbedisce il tuono ad una sola di queste cagioni, quando all'altra molto prevale: e se non si dà un tale predominio, nasce sempre un suono disaggradevole allora che le due cagioni non vanno perfettamente d'accordo,

restando

sentando entrambe di produrre un suono diverso. Dirò in primo luogo di quegli stromenti, in cui il tuono è determinato dal modo, col quale il suono si forma. Dirò poscia premesso a quegli altri, nei quali il tuono dipende dalla lunghezza della corda di aria nelle loro canne rinchiusa. Finalmente dirò qualche cosa dei suoni falsi, traendo la origine dal contrasto delle due cagioni determinatrici del tuono.

II. Qualora un corpo sonoro si vibra, urta violentemente nell'aria, le particole della quale ~~costipandosi~~ prima, indi rarefacendosi, e poi dilatandosi, oscillano insieme allo stesso corpo sonoro. Nella prima Dissertazione dello Schediasma VIII. feci vedere, che nel tempo di una mezza vibrazione del corpo menzionato le particole aeree l'una dopo l'altra si comprimono, e in pari tempo si riducono al primiero stato; che rimpiegando il corpo sonoro spendono il tempo di mezza vibrazione nel dilatarsi, ed altrettanto nel ritornare alla primiera densità equilibrata col peso dell'atmosfera.

Con quanto maggiore, o minore velocità in un' oscillazione il corpo sonoro scorre lo spazio, che supponiamo dato, per cui si vibra, e per conseguenza quanto minore, o maggior tempo si impiega a scorrerlo, altrettanto cala, o cresce il tempo della compressione, o della dilatazione, e della restituzione dell'aria.

III. Conciossiaché succeda il medesimo effetto nel nostro fluido, o venga questo urtato dal corpo sonoro, o pure al contrario sia spinto con pari velocità contro il corpo suddetto; ne segue che urtando l'aria in un corpo, si costipa, ed indi si restituisca, e concependo palpitazione produce suono. + ed in fatti Ad ogni moto violento di aria sempre qualche suono

+ Adiviene lo stesso anche quando l'aria in moto colpisca nell'aria quieta, o che cammina avanti più lentamente; imperocché in questa circostanza altresì l'aria si condensa, e si mette in oscillazione. In sì fatta maniera, e non altrimenti le particole aeree collocate in una linea, lungo alla quale si propaga il suono di un corpo, successivamente si vibrano, e ci portano il detto suono all'orecchio. ~~Osserviamo tutto dì, che~~ Ad ogni moto violento &c

suono vi corrisponde. Cotale suono poi si sente grave e debole, ovvero
~~tanto più grave, od acuto, quanto l'aria cam:~~ acuto e forte, conforme
mina con minore, o con maggiore velocità; e che l'aria cam:
~~imperciocchè i tempi in cui si effettuano le compressioni,~~
~~e le rarefazioni stanno in ragione reciproca delle~~
~~velocità mentovate~~. Tutto giorno sperimentiamo,
che il suono cresce, e di tuono, e di forza, all'incalzare del vento, e
poscia torna a calare, quando il vento diviene meno
impetuoso.

IV. Che se l'aria spinta violentemente sia co-
stretta passare per un'angusta fessura, non
solo urta nelle pareti della fessura stessa; ma
affollandosi per trovare l'uscita, vie più si comprime,
e concepisce un suono spiritoso e robusto.
Dipende il tuono dalla celerità, colla quale l'aria
passa per la fessura, da cui prendono norma i
tempi delle condensazioni dell'aria stessa.
La detta velocità può alterarsi per due motivi:
o perchè il movimento dell'aria cali o cresca
prima di entrare nella fessura, che si suppone
invariata; o perchè conservandosi costante il
nominato movimento dell'aria, lo spiraglio
si ristringa, o si allarghi, essendo verità nota
che in tal circostanza l'aria cammineră dentro
la piccola apertura con velocità in proporzione
inversa dell'~~aper~~ aja delle aperture medesime.
Ma posto che il moto dell'aria prima d'intro-
dursi nella fessura, e l'aja della stessa si cor-
rispondessero in data ragione; l'aria viagge-
rebbe per la fessura in ognuno degli accennati
casi colla medesima velocità, ed i tuoni non
riuscirebbero diversi; salvo che nel piano, e nel
forte, secondochè per l'apertura più o meno
ristretta passerebbe una quantità d'aria
~~maggiore~~ minore, o maggiore.

V. Rischiaro le cose dette coll'esempio
del fischio. Per fischiare s'increspano, e si
ristringono le labbra, di maniera che alla metà
di esse resta un angusto pertugio, per cui spinto
velocemente il fiato si genera il fischio. Dipen-
de il suo tuono dalla velocità, colla quale l'aria
passa per l'apertura, e nella determinazione di
tale

∧ con una qualche ra-
gione inversa

tale velocità ci occorrono due elementi, cioè e di dare il vario empito, con cui il fiato è cacciato dai polmoni, e delle labbra il vario ristringimento. Se quanto cresce, o cala la forza, altrettanto crescerà, o calerà il moto, col quale il fiato esce dal petto, l'aria passerà transitando per il pertugio con celerità maggiore, e rimanendo costante il tuono del fischio, se ne altererà soltanto la forza, e si udirà esso o piano o forte, secondo che per lo adito più, o meno angusto passa una quantità di aria minore, o maggiore. Chi si diletta di fischiare, ed è fornito di buon gusto, e di orecchia perfetta, sa far uso a dovere dei due descritti elementi, producendo le voci di vario tuono e modificandone ad arbitrio il rigore.

VI. Alla classe di cui parliamo, appartengono i suoni, che si ascoltano, quando il vento si introduce per una carta sottilissima, ed in quel modo e messa a parte, che in luogo di vetri ripari gli sportellini delle di una finestra: il quale istromento (se pure merita un tal nome) Mr. Dodart (a) chiama per brevità Impannata susurrante. Crescendo la velocità del vento, crescono i suoni e di tuono, e di forza; perchè qui non ha luogo l'artifizio di ristringere l'apertura nei tuoni acuti, onde non riescano più vigorosi dei gravi; e quindi si odono sforzati i tuoni gravi, e crudi gli acuti. Anche le pivette dei Fagotti, degli Oboè, e certi registri dell'Organo, comprova meritano di essere collocati sotto la stessa specie. Le corde di aria contenute nelle loro canne, sono talmente corte, che non possono fare contrasto colla violenza della imboccatura, dalla quale principalmente riceve il tuono determinato. Nel registro dei tromboncini di un organo del Sig. D. Pietro Nachini la canna più grave lunga in circa un sesto di un piede, corrisponde all'unisono colla

(a) Memorie dell'Accad.ª di Parigi dell'anno 1700.

colla canna lunga otto piedi del registro, che chiamano Principale; * ~~quindi ella è cosa chiara, che il suono di quella non è come in questa dalla lunghezza della corda d'aria determinato.~~ Dalla imboccatura per tanto il suono dei Tromboni dipende; ed in fatti esso cresce, o cala, secondo che abbassando o alzando la molla di ottone, che comprime la linguella, si ~~[illegible]~~ accorcia, o si ~~accorcia~~ allunga quella porzione della linguella che oscilla, e conseguentemente si ristringe, o si allarga la fessura, per cui l'aria entra dentro la canna. La canna nel mentovato registro fa la stessa figura come nel Gravicembalo e nel Violino il corpo dello strumento, ed è destinata a rendere più sonora la voce. ~~Ma quantunque~~ E siccome il corpo della Violetta è maggiore di quello del Violino, ed il corpo del Violoncello eccede quello della Violetta, così ai suoni più gravi del nostro registro si adattano canne più lunghe e più larghe, onde alla gravità della voce corrisponda il corpo dello strumento. Nei Violino [illegible] egli è necessario che lo stesso corpo serva a più suoni; ma nel registro, di cui parliamo, si può con maggior proporzione adeguare a ciascun suono la canna, che più gli conviene.

VII. Se ciò che ha stabilito il celebre M. Dodart intorno le cagioni della voce dell'uomo, e de' suoi differenti suoni nelle Memorie della Reale Accademia di Parigi degli anni 1700. 1706. 1707. si accordasse interamente colla verità, il suono della voce umana, ed ancora di altri animali deriverebbe unicamente (supposta soltanto la velocità dell'aria nel canale della trachea) dalle varie aperture di quella fessura, cui si dà il nome di Glottide. Ammette questo dotto Autore la varia tensione ed i fremiti delle labbra della glottide, ma soltanto come necessarj alla formazione della voce, e non già come determinanti il tuono della medesima. Io per altro ho dimostrato (III.) che

ancora

* In oltre la lunghezza di due Tromboni accordati in Ottava non si ritrova nella ragione necessaria, acciocchè le canne corrispondenti del Principale formino la detta consonanza, ma trovasi essere di presso nella ragione 3 : 2. Quindi ella è cosa chiara, che il suono dei Tromboni non è come nelle canne del Principale dalla lunghezza delle corde di aria determinato. Dalla
Di:

ancora indipendentemente dalla palpitazione di un corpo solido, l'aria può rendere suono; ed in confermazione di ciò basta riflettere allo smaccato fragore dei tuoni. Oltre di che qual mai sensibile tremito possono concepire le fibre del legno, che circondano la fessura, per cui l'aria ha l'ingresso dentro la canna di un Flauto? Φ Frattanto il ~~dotto~~ celebre M. Ferrein (b) ha scoperto che le due labbra della glottide, da lui chiamate corde vocali, sono quelle che incitate alle oscillazioni dal fregamento dell'aria, che passa violentemente ~~per la glottide~~ fra loro, e rese più o meno secondo il bisogno producono i diversi tuoni della voce. Non potendo l'ingegnoso Autore tentare le sue sperienze sopra uomini vivi, s'immaginò di restituire la voce ai morti. Adattato un piccol mantice ad alcune trachee fresche fresche, l'aria che con gran forza fece passare per la glottide, secondochè le cordicelle di questa furono più o meno stirate, portò differenti tuoni all'orecchio, ne' quali dalle diverse aperture della glottide non ricevevano alterazione. Le varie voci, ~~le quali~~ che si ottengono col mezzo di questa esperienza, somigliano poco di natura, e ancora si riconosce il muggito di un toro, il grido di un cane, che si lamenta, quantunque manchino il palato, i denti, le labbra; e la laringe medesima staccata dalla gorga dell'animale fosse ordinariamente assai mutilata, e ~~la~~ qualche fiata altresì si fosse staccata l'epiglottide, e tutti i pezzi di cartilagine, che cingono, o coprono la glottide, e le corde vocali, a cagione di rendere visibili le loro vibrazioni. E conciossiachè ~~veramente Abbenchè gli esperimenti~~ poteva sembrare impossibile, che due corde, la cui lunghezza non eccede un'oncia, rendessero un suono maschio e vigoroso nei tuoni gravi, non ha mancato M. Ferrein (c) di allegare la ragione dimostrativa di questo effetto maraviglioso.

Φ a capo

(b) Memorie dell'Accad.a di Parigi 1741.

(c) Memorie dell'Accad.a di Parigi 1743.

VIII

VIII. Abbenchè gli esperimenti del commendato
Scrittore non ci lascino dubitare, che dalla varia
tensione delle labbra della glottide nascano prin=
cipalmente i cangiamenti di suono; nulladimeno
essendo parimente certo, che quanto più si tendono
le corde vocali, tanto maggiormente l'una all'
altra si accostano, e che questo solo elemento
della diversa apertura, quando i polmoni spin-
gono l'aria con forza uniforme, produca la diver=
sità dei suoni nel zufolo; io congetturo che
in una voce perfetta amendue le cagioni si unis=
cano nella determinazione del medesimo suono.
Con ciò rimane il pregio loro alle belle riflessioni
di M. Dodart intorno alle minutissime alterazioni
dell'apertura della glottide eguale al più ad una
linea, mentre si fa transito per piccolissimi gradi dal
suono più grave al più acuto, e mentre non can=
giando suono, si passa con incomparabili incre=
menti, o decrementi dal piano al forte, o si con=
tinua. Non cessa egli, e con ragione, di ammi=
rare la infinita Sapienza del Creatore, il quale
ha dato all'uomo la facoltà di far uso di un orga=
no con tanta perfezione, e esattezza, senza conos=
cere la maravigliosa struttura, e gli stupendi
artifizj.

IX. Alla qualità della voce umana molto giova la perfezione di ciascuna corda vocale,
la loro somma uniformità nella tessitura, nella densità, nella ten=
sione, nella rigidità, e nella lunghezza delle
due corde vocali, ed altresì l'esatto accordo fra
le due cause determinatrici del suono. Qualunque
considerabile difetto, o alterazione di questa puntuale corris=
pondenza può far divenire falsa la voce. Se
non che fa rivolgendo la considerazione al registro
dell'Organo, che si nomina voce umana, perchè
di molto la imita, ogni suono dal quale fornito
di una aggradevole pulsazione è formato da due
suoni, che discordano da un presso per un Diesis enarmonico;
si potrebbe sospettare, che nella voce dell'uomo li
affatto analogo, da una cagione simile procedesse.

\+ a capo

\+ La doppia concavità della bocca, e delle narici deno=
chiamata dal Fabrizio canal anteriore, per distinguerla
dal

## Schediasma VII.

canale interiore, cioè dalla trachea, fa l'uffizio di corpo dello stromento in riguardo alla voce; e per quanto attiene la disuguaglianza dell'angusti e la ristrettezza delle parti, onde questo canale è composto, possa sembrar poco capace di risuonamento, non può mettersene in dubbio l'ottimo effetto almeno mediante il palato, e le narici. Rendesi ciò manifesto l'alterazione del suono della voce nei raffreddati di testa, e quando succede per qualunque cagione, che l'aria non esca liberamente pel naso. Giudica M. Dodart falsa la frase popolare, parlare, o cantare nel naso, e tutto al contrario stabilisce che se cantasi colla sola bocca, il naso essendo chiuso, e per conseguenza senza ch'esso abbia alcuna parte nel suono della voce, allora la voce che ne risulta rassomiglia quella delli avi-tori, il che propriamente intendesi di esprimere, quando si dice parlare, o cantare nel naso. Ricorrendo agli esperimenti ho trovato, che cantando e col naso, e colla bocca, ed anche o col solo naso, o colla sola bocca la voce riuscirà aggradevole, purchè l'aria non passi per il canale delle narici o poco, o molto impedito; che se non si osserverà questa precauzione, si canterà nel naso con disgusto di chi sta ad ascoltare.

La dimensione del corpo dello stromento relativamente alla voce non è costante. La glottide ascende, allora che si producono le voci acute, ed al contrario discende, quando si fanno sentire le voci gravi, e se queste saranno delle più profonde, si sporge la bocca in fuori quanto si può: e quindi corrisponde alle voci acute un canale alquanto più corto, ed alquanto più lungo alle voci gravi. Si capirà la maggiore superiorità della voce umana, riflettendo ch'essa sola eguaglia in un registro di Tromboncini nelli Organi di moltissime canne formato, che

andassero

minassero per minimi gradi crescendo di tuono.
Ma conciosiachè con un tale registro non si potrebbe ese=
guire il piano, ed il forte; chiaramente si
scopre, quanto esso alla voce umana cederebbe
di perfezione.

X. Mi innoltro a parlare degli stromenti
da fiato, nei quali il tuono è determinato
dalla lunghezza della corda di aria contenuta
nelle loro canne. Sotto questo genere vanno
collocati le canne di Organo, il Flauto, il ~~traversier~~ flauto traverso,
l'Oboè, il Fagotto, la Tromba, il Corno da Caccia &
che non possono rendere altri suoni, salvo che
quelli, che sono proprj della corda di aria più
o meno lunghe, che si mettono in tremito.
Ho detto più o meno lunghe per due motivi; perchè
sono atte ad oscillare la corda di aria contenuta
nel corpo dello stromento, o le sue ~~due~~ metà, o le
sue terze parti &; e perchè la canna dello stro=
mento sia in più luoghi artifiziosamente forata,
conforme si pratica nel Flauto, nel ~~traversier~~ flauto traverso, nell'
Oboè, nel Fagotto. Serrati tutti i fori, la corda
di aria termina a un ~~di~~ presso all'estremità della
canna; ed aprendoli gradatamente, la corda
stessa si va proporzionatamente scorciando.

XI. Ma quantunque nei mentovati stromenti
l'imboccatura serva alla corda di aria, in quan=
tochè egli è di uopo adattarla a quei suoni,
che si vogliono generare. Mi sovviene che
avendo otturata colla palma della mano una
canna di organo, è stato necessario darle un
veementissimo fiato, acciocchè producesse un suono
all'ottava grave di quello della canna aperta: e accre=
scendo un poco la forza del fiato, il suono saliva
all'ottava acuta. Se io voglio che suoni la
corda intera della canna circondata, bisogna che
regoli talmente la velocità del fiato, ch'entrando
nella bocca della canna, e comunicando colla
corda di aria, possa concepire un tremito unisono

alla

alla corda suddetta. Incitando maggiormente il fiato, onde divenga unisono alla metà della corda, sonano le due metà, e così di mano in mano si pongono in oscillazione le terze, le quarte parti ec. per opera di fiati unisoni ad esse parti. Chi applicasse al fagotto la pivetta dell' oboè, in vece di far oscillare la corda intera, ne metterebbe in tremito le metà, o le terze parti, di modo che si udirebbero suoni, che ai consueti del fagotto corrisponderebbero in ottava, o in duodecima. Rottasi lateralmente una pivetta d'oboè, nel principiante, mozzò via la parte rotta, e resa la pivetta più ristretta notabilmente. ~~Ada~~ Avendola poi adattata allo stromento, i suoni tutti montavano all' ottava alta. In somma ridurrassi a memoria il Lettore, essersi da me dimostrato nello Schediasma IV. al numero XXII., che non si comunicano sensibilmente altri tremiti che gli unisoni o esattamente, o prossimamente, e però se la palpitazione, che concepisce il fiato mediante l' imboccatura, non si riferisca pure all' unisono colla corda aerea contenuta nel corpo dello stromento, o colle parti aliquote dalla sua lunghezza, non nasce ~~certamente~~ sicuramente alcun suono.

XII. Sino ad un certo segno la maggiore, o minore velocità del fiato cagiona nel suono il forte, ed il piano. Non può per altro negarsi, che in quegli stromenti, ~~nei quali la maggiore apertura, per cui l'aria passa, pone~~ la struttura dei quali non permetta, che acconciamente si allarghi, o si restringa l'angusta apertura, per cui l'aria passa, il forte ed il piano non vedansi accompagnati da qualche piccolo accrescimento, o diminuimento di tuono, seguendosi per conseguenza una corda d'aria

alquanto

alquanto più corta, o alquanto più lunga. Non succede così nelli oboè, e nel fagotto, nei quali comprimendo la piva con forza minore, o maggiore, si fa sentire il forte ed il piano senza alterazione del suono.

Nella tromba, e nel corno da caccia i limiti del forte, e del piano sono molto ristretti; di maniera che passati questi limiti, il fiato cangia di tuono, ed essendo divenuto unisono ad una parte aliquota della corda di aria nello stromento rinchiusa, non può ad essa il tremito sonoro partecipare. Al contrario nelle canne di organo, nei flauti, negli oboè & i detti confini sono talmente vasti, che ridotto per esempio il suono della corda intera alla massima forza, di cui è capace, basta ch'io accresca per un minimo la velocità del fiato, acciocchè questo divenga unisono alle due metà della corda, e produca il [illegible].

XIII. Per confermare via più la verità che negli stromenti da fiato l'imboccatura, e la corda di aria determinino il tuono, il quale obbedisce per dir così a quello dei due elementi, che ha maggior forza, feci il seguente raziocinio. La pivetta di oboè separata dallo stromento rinchiude nella piccola canna una corda di aria così corta, che l'elemento predominante nella determinazione del tuono dee rispettarsi l'imboccatura. Col variar dunque questa un perito sonatore potrà cavar parecchi tuoni dalla pivetta, i quali faranno oscillare corde di aria o più lunghe, o più corte della canna, la cui lunghezza alla violenza della imboccatura non ha vigor di resistere. Applicata la pivetta al corpo dell'oboè, e lasciato aperto ogni foro, la corda di aria è di lunghezza considerabile; e conseguentemente la diversità dell'imboccatura potrà ottenere minore effetto.

Similmente

Finalmente osservati i fori tutti dello stromento, la corda d'aria diviene talmente lunga, che dalla varia imboccatura verrà cagionata molto piccola mutazione di suono.

Dopo col mezzo del P. Francescantonio Vallotti insigne Maestro di capella nella Basilica di S. Antonio di Padova il Signor Matteo Luca famoso Sonatore di oboè a tentava gli esperimenti mentovati, i quali a maraviglia corrisposero ai miei pensamenti. Colla pivetta separata dall'oboè fece un intero esacordo di voci giuste, distinte, ed articolate; affermando che sarebbe arrivato anche all'ottava, se avesse avuto in pronto una pivetta buona, e perfetta; giacchè il vero indizio della perfezione di una pivetta si è il render essa le voci tutte di un'intera ottava. Notò il P. Vallotti, che per cavare il suono più grave dalla pivetta, li apriva colle dita prima di applicarsela alle labbra, colle quali poi comprimendola acconciamente, e rinforzando anche il fiato giusta il bisogno, produceva i suoni a grado a grado più acuti. Adattata poscia la pivetta allo stromento, lasciando i fori tutti aperti, non ha potuto variar la voce che per un tetracordo, ma con intonazione meno perfetta che nel primo esperimento. Chiusi all'ultimo tutti i fori, non gli è riuscito di far mutazione se non di un tuono e un di presso; ma con intonazione affatto falsa, ed assai disgustosa.

XIV. Nasce il suono falso dal mescolamento di più suoni, che in ragioni ineleganti fra loro si riferiscono. Nella terza esperienza si aveva spinto dentro la pivetta, e concepisce sforzatamente un

un suono più grave, o più acuto di quello
della corda d'aria contenuta nello stromento,
il quale suono non pertanto agisca nella detta
corda a cagione dell'unisono prossimo, di ma=
niera che si sentono nel tempo stesso il suono
generato nella piva, ed il suono della corda aerea rinchiusa
nella canna dell'oboè. Quindi manifestamen=
te si comprova quello che ho detto di sopra (XI.)
doversi l'imboccatura talmente regolare, che
il fiato possa acquistare palpitazioni unisone alla
corda d'aria, di cui si vuol fare sentire il suono.
In fatti procedendo i sonatori di oboe per esem=
pio dal grave all'acuto, premono sempre più
la pivetta colle labbra, onde la sua apertura
si vada gradatamente stringendo, e se in alcuni
casi il ristringimento non è sufficiente, supplis=
cono coll'accrescimento della velocità del
fiato, il che ne' suoni più acuti suol rendersi
necessario.

Schediasma VIII.

## Della propagazione dei tremiti sonori nell'aria.

### Dissertazione prima.

Per procedere rettamente nella trattazione dell'argomento difficilissimo, che mi propongo, stimo necessario l'appoggiarmi ad alcuni fenomeni manifestati dalla esperienza.

Primieramente oscillando un corpo sonoro io sento in diverse distanze lo stesso suono in riguardo al grave e all'acuto, e si udirà ancora egualmente forte, prescindendo dalle resistenze, se in cambio di dilatarsi sfericamente intorno il centro sonoro, fosse obbligato a propagarsi lungo un canale cilindrico per tante linee rette parallele ai lati del detto canale. [illegible] [illegible] [illegible] indicano, che tutti i punti aerei si vibrino per eguali spazj con pari velocità. In [illegible].

In secondo luogo essendo l'aria valevole di portarci all'orecchio più suoni, che differiscono solo nel piano e nel forte, ne segue necessariamente, che le sue particelle danno [illegible] [illegible] a guisa di pendoli a cicloide, e che per conseguenza gli spazj scorsi dalla stessa particella, [illegible] come i suoi [illegible] negli angoli sperimenti i tempi, nei quali i detti spazj si scorrono.

Finalmente il suono viaggia egualmente, cioè a dire le distanze alle quali si propaga sono proporzionali ai tempi, che nella mentovata propagazione si impiegano. Da un tal fenomeno si ricava, che segnati in una retta linea varj punti l'uno dall'altro egualmente distanti, se fra il principio del moto del primo, e del secondo si passa il tempo uno, fra il principio del moto del primo e del terzo si passerà il tempo due e così di mano in mano. Quindi i varj punti di aria fanno pari vibrazioni che principiano tanto più tardi, quanto i punti sono più rimoti dal centro sonoro.

Dai tre premessi fenomeni deriva il giusto, che metto sotto la considerazione di chi legge col mezzo del seguente teorema.

Teorema. I.

Composta il dì 29 Luglio 1755

* Della propagazione del suono per linee o raggi, che partono dal corpo sonoro quasi da centro, supponendo che tutti i punti aerei contenuti nel medesimo raggio si vibrino per eguali spazj.

Per ora suppongo, e mi riservo di provarlo in altre dissertazioni seguenti, che il suono diffondesi non per settori sferici, ma per innumerabili linee o raggi, che partono dal corpo sonoro quasi da centro, e che tutti i punti aerei si vibrino &c.

[illegible] del tremore delle oscillazioni del corpo sonoro, ordiscano altrui le agitazioni nelle nerve.

Sia Aa (fig. 29) una minima particola o fibra tirata, ed i suoi punti estremi A, a si sbrigano per le tratte eguali AG, ag. Sopra i diametri AG, ag si descrivano i circoli disegnati della figura, e scritte prima per i centri D, d le linee 3Dg, ... normali a AG, onde ogni circolo resti diviso in quattro quadranti; ciascun quadrante s'intenda distribuito in un pari numero infinito di parti eguali. Nella figura non ostante è conveniente di dividere ogni quadrante in tre sole porzioni. Per i punti delle divisioni si conducano, come nella figura, le ordinate ai diametri AG, ag.

Vibrandosi il punto A non altrimenti che un pendolo a cicloide, gli archi A1, A2, A3 &c. rappresentano i tempi nei quali si scorrono gli spazj corrispondenti AB, AC, AD &c., i quali trovansi come i seni versi degli archi AD1, AD2, AD3 &c., che ai detti archi A1, A2, A3 &c. sono proporzionali. Le stesse riflessioni si adattino alle oscillazioni del punto a.

La nostra fibra Aa sia di tale lunghezza, che fra il principio del moto dei punti estremi A, a si passi il tempo proporzionale all'arco A1. A norma di ciò scorso dal punto A lo spazio AB, in tale istante si comincerà a muovere il punto a, e la particola Aa si sarà compressa per lo spazio AB. Nel secondo tempicello 1, 2 il punto A viaggerà per lo spazio BC, ed il punto a per lo spazio ab = AB, ed essendo BC > ab, crescerà la compressione della fibra, che si troverà eguale a BC. Con tal metodo procedendo osserveremo, che si aumenta il ristringimento della fibra Aa sino a tanto che il punto A giunge al punto D, che divide per metà lo spazio totale AG. Di qui si fa la condizione: la compressione quando al istante si eguaglia a CD, ed il punto ... della ... e la particola Aa è fornita della massima velocità. ... il ... mentre il punto A passa lo spazio DE, dal punto a

si scorre

si scorre lo spazio eguale cd, [illegible]
i quali spazj sono i massimi che si passino
in uno dei nostri tempicelli rappresentati
dalle parti allungate, in cui si sono distribuiti
i due circoli, e conseguentemente si passano
colla massima velocità. Osservisi che legge,
che per ciascuno de' riportati tempicelli la contrazione, [illegible] nè crescono nè calano
viaggiando come abbiamo notato i punti
A, a, per eguali spazj Dd, cd.

Dobbiamo osservare nel tempo minimo, che segue
immediatamente, il punto A s'avanza
per lo spazio ez, ch'è più piccolo dello
spazio da corso dal punto a, e quindi
la fibra comincia a dilatarsi. Nei tempicelli
che succedono, essendo i passi del punto A
minori di quelli del punto a, continuamente scemando la compressione, la quale
finalmente si riduce a nulla, quando la
fibra compiuta una vibrazione [illegible],
si giace nel sito Gg. Quivi essendo
la particola restituita alla primiera dimensione, [illegible] col peso della atmosfera, e [illegible] in riposo, [illegible]
[illegible], più moto, se a ciò non le dà
[illegible] motivo il [illegible] del
movimento del corpo sonoro.

III. In fatti [illegible] il corpo sonoro si rompe
l'equilibrio dalla parte di A, e ricevuto
il punto a continua il suo cammino
per lo spazietto fg, e compie una vibrazione
il punto A retrocede per un passo [illegible],
Gz, e la [illegible] fibra si dilata per cagione
della gravità oltre la sua naturale dimensione.
Nel tempicello seguente ritornano indietro,
il punto A per lo spazio maggiore ze,
ed il punto a per lo spazio minore gf,
la dilatazione si aumenta. Acquista
essa il massimo valore, quando pervengono
i punti A, a nei siti D, d, la particola
è fornita della massima velocità.
Da qui calando la velocità cala altresì la
[illegible] con tal legge, che divengono l'una
e l'altra eguali a nulla quando
mentre la fibra si restituisce alla primiera

positura

posizione Aa. In questo caso di bel nuovo riflette che accoppiandosi nella particola di aria ~~uguale~~ la quiete con quella lunghezza che richiede l'equilibrio col peso della atmosfera, egli è impossibile, che senza una cagione estrinseca di cui invitata vibrazione del corpo sonoro segua ad oscillare.

Quello che si è detto di una particola si applichi a tutte, e concludendosi, che al cessare delle vibrazioni del corpo sonoro, cessano parimenti le agitazioni dell'aria; il che &c.

IV. I premessi raziocinj Corollarj ci hanno fatto scoprire varie curiose proprietà, che le particole di aria sono oltre il consueto compresse nelle oscillazioni, dilatate nelle reciprocazioni; che le massime compressioni, e dilatazioni vanno congiunte colle massime velocità acquistate dalle particole oscillando, e reciprocando; che nell'atto di ridursi alla quiete riacquistano le particole la loro ordinaria compressione. Se chi legge esaminerà gli Autori più celebri si accorgerà, che in tale proposito hanno travveduto. In primo luogo bene osservo la differenza, che passa fra una fibra di aria ed una corda solida, che oscilla trasversalmente a due cavalli appoggiata: e continuerebbe questa a vibrarsi per un tempo infinito, se non vi fossero resistenze: perchè quando è in quiete si trova fuori di equilibrio, e quando si trova in equilibrio, vale a dire in linea retta, non è in quiete. All'opposto la fibra aerea, rimossa la cagione esterna, cessa di vibrarsi: perchè in essa si uniscono e l'equilibrio, e la quiete.

V. Dilucidato un tal punto, che era stato da molta oscurità involuto, proseguisco l'intrapreso cammino, e mi faccio a sciogliere il seguente problema.

~~[illegible]~~.

Il punto estremo A (fig. 30) della linea sonora AB facendo una mezza oscillazione per la direzione AB scorre uno spazio eguale alla linea AD normale ad AB, ed in tanto il concetto sonoro si era propagato da A sino in B. Nell'istante in cui che il punto A giunge al termine del detto spazio, un altro qualunque punto G abbia passato uno spazio eguale alla linea GH parallela ad AD. Congiunti i punti D, H ed altri similmente determinati con una curva, che passerà per il punto B; perchè quando A ha compiuta una semivibrazione, il punto B non si è ancor cominciato a muovere; si dimanda la natura della curva medesima.

Segnata BC eguale e parallela ad AD, e condotta per li punti D, C la linea DCF, si faccia centro in C e col raggio CB si descriva il quadrante BKF. Si meni poscia per il punto H la retta HAK parallela ad AB.

Viaggiando il suono equabilmente, se nel tempo AB si propaga da A sino in B; nel tempo GB si propagherà da G sino in B, e la linea AG esprimerà il tempo, nel cui il punto G si comincia a muovere dopo del punto A. Ma i punti A, G giungono al termine degli spazj eguali alle linee AD, GH nel medesimo istante, ed il punto A a scorrere lo spazio eguale ad AD ci impiega il tempo AB; dunque il punto G nel passare lo spazio GH vi spenderà il tempo GB cioè a dire quel tempo stesso, nel quale il suono cammina da G sino in B. ~~[illegible]~~ Ho notato, che i tempi ^[al numero primo] in cui si scorrono gli spazj eguali alle linee AD, GH stanno come gli archi BF, BK, dei quali le dette linee sono i seni versi. Quindi ci si presenta la analogia AB : GB :: BF : BK

da cui

Da cui nasce l'altra $AB : AG :: BF : KF$, che somministra l'equazione $AG = \frac{AB \cdot KF}{BF}$. Si chiami $AB = DC = \frac{1}{2}L$, $AD = BC = CF = c$, il quadrante $BKF = b$, l'arco $KF = z$, $AG = DQ = x$, $HQ = y$, e conseguentemente $GH = c - y$. Egli è noto che l'arco $KF = z$ si esprime per $\int \frac{c\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$. Sostituiti in cambio delle linee i valori analitici nella premessa formola, avremo

$$x = \frac{L}{2b} \int \frac{c\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{Lz}{2b};$$

equazione appartenente (1) alla curva. La stessa curva si è quella, in cui si spiega la metà $DC = \frac{1}{2}L$ della corda $L$ solida e tesa, mentre si trova appoggiata a due scannelli, uno de' quali è in $D$, ed il punto medio $C$ sovra la retta $CB = c$. Questa verità è stata da me altrove dimostrata nello Schediasma IV., e ciò prima di me avevano fatto i Sig.ri Brook Taylor nel suo metodo degli incrementi diretto ed inverso, e Giovanni Bernoulli nel Tomo III dei Commentarj dell'Accademia di Pietroburgo. Non diminuì pienamente, che bella scoperta, che la curva ultimamente nominata sia la stessa con quella del presente Problema siam debitori al Sig.r Giovanni Bernoulli il giovane. Veggasi la sua eccellente Dissertazione sopra la propagazione del lume, che l'anno 1736 ha ottenuto il premio dalla Accademia di Parigi.

(1) alla curva nominata DHB. La stessa curva

Corollario

VI. La curva $DHB$, a cui si adatta la semicorda solida $DC$, si riferisca all'asse $DC$, e $BC$, $HQ$ sono gli spazj, che in pari tempo si scorrono mentre essa corda passa dalla positura $DHB$ alla linea retta $DQC$. Che se la curva $DHB$ si considera come servente al nostro Problema va riferita all'asse $AB$ e gli spazj per la direzione $AB$, al fine dei quali giungono

nello

quello stesso istante in punti versi A, G si ritrovaranno alle linee AD, GH quindi avverta, che i punti A, G muovevano nel medesimo momento al termine dei rispettivi spazj, perchè unito in istante cominciò il tempo BK, che dal punto G, s'impiega a passare lo spazio eguale a GH, ed il tempo KT, per cui il punto G continua a muoversi dopo del punto A, ne risulta il quadrante BKT descritto al principio spazio dal punto A nello scorrersi per uno spazio eguale ad AD.

## Problema II.

Determinare la forza acceleratrice di un qualunque punto G, dopo che ha comminato lo spazio eguale a $GH = c-y$, e rimane gli resta da scorrere lo spazio $= HQ = y$.

VII. Data nuovamente per vera la equazione della curva DHB, $x = \frac{L}{2b} \cdot \int \frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, faccio $GH = g$, onde sia $HQ = y = c-g$, e conseguentemente $dy = -dg$. Adempiute le sos- $c^2 - y^2 = 2cg - g^2$. tituzioni, trovo $x = \frac{L}{2b} \cdot \int \frac{-c\,dg}{\sqrt{2cg-g^2}}$

e differenziando $dx = \frac{Lc}{2b} \cdot \frac{-dg}{\sqrt{2cg-g^2}}$ (1)

Passo alle seconde differenze prendendo $dx$ come costante, ed adempiute le convenienti operazioni scopro $ddg = \frac{c-g \cdot dg^2}{2cg-g^2}$ (2)

Segno le due flussioni GL, LM ciascuna eguale alla costante $dx$, e condotte le ordinate LO, MR, per li punti H, O, tiro le linee HN, OP parallele ad AB e con ciò determino $NO = dg$, $PQ = dg + ddg$

Rappresentano ML, LG le pari lunghezze di due particole di aria tali e quali le richiede l'equilibrio col peso della atmosfera: e giacchè i punti M, L, G si sono mossi per gli spazj eguali alle linee MR, LO, GH

Ora avendo dimostrato nello Schediasma II. che la densità dell'aria sono proporzionali alle forze comprimenti; e per conseguenza alle corrispondenti elasticità, che alle suddette forze comprimenti si eguagliano, o stando la densità delle fibre $dx$, $dx-dy-ddy$, $dx-dy$ reciprocamente come le loro dimensioni; nella stessa ragione inversa si riferiranno altresì le forze elastiche di esse fibre. Si chiami P

ML GH, egli è chiaro, che la particola si è ridotta alla lunghezza $ML - PQ = dx - dy - ddy$, che la particola LG si è ridotta alla lunghezza $LG - NO = dx - dy$. ~~Ora supponendosi le compressioni PQ, NO minime relativamente ad ML, LG; le elasticità delle fibre $dx$; $dx-dy-ddy$; $dx-dy$ saranno reciprocamente come le loro dimensioni.~~ Si chiami P il peso della atmosfera, a cui si eguaglia la forza elastica della fibra $dx$; e facendo

$$\frac{1}{dx} : \frac{1}{dx-dy-ddy} :: P : \frac{P\,dx}{dx-dy-ddy}$$

$$\frac{1}{dx} : \frac{1}{dx-dy} :: P : \frac{P\,dx}{dx-dy}$$

impareremo, che la forza elastica della particola ML si eguaglia a $\frac{P\,dx}{dx-dy-ddy}$ che la forza elastica della particola LG si eguaglia a $\frac{P\,dx}{dx-dy}$. Ella è la differenza di queste elasticità, che sollecita la particola LG in L verso B, e quindi scopriremo il valore della forza sollecitante la fibra LG eguale a

$$\frac{P\,dx}{dx-dy-ddy} - \frac{P\,dx}{dx-dy} = \frac{P\,ddy}{dx}.$$

In vece di $ddy$ pongo la sua grandezza somministrataci dalla equazione (2), onde si abbia la detta forza sollecitante

$$= \frac{P \cdot \overline{c-y} \cdot dy^2}{dx \cdot \overline{2cy-y^2}}:$$

Ma la equazione (1) mi insegna essere $\frac{dy^2}{2cy-y^2} = \frac{4b^2dx^2}{L^2c^2}$, ed inoltre $c-y = u = HC$; dunque effettuate tali

sostituzioni

sostituzioni troveremo la nostra forza
$= \frac{4b^2 p\, y\, dx}{c^2 L^2}$. Sia m la massa
della linea o corda di aria AB, la
cui lunghezza L. Di questa massa
alla particola LG, che prima di ricevere
la nuova compressione si eguagliava a
dx, ne tocca la porzione $\frac{m\,dx}{L}$.
Dividendo pertanto la forza sollecitante
la fibra LG per la massa della stessa
fibra, ne risulta la forza acceleratrice
della particola LG, e per conseguenza
anche il punto $G = \frac{4b^2 p y}{c^2 L m}$, ritenendo
quando ad esso punto resta da scorrere
lo spazio $= HG = y$; il che ec.

Corollario I.

VIII. Essendo che tutti i punti aerei per
cagion di una oscillazione del corpo sonoro
fanno successivamente vibrazioni iso=
crone ed eguali; ne segue che un qua=
lunque punto A, mentre gli rimane
da passare lo spazio $= HG = y$, sarà
fornito della forza acceleratrice
$\frac{4b^2 p y}{c^2 L m}$.

Corollario II.

L'aver trovato le forze acceleratrici pro=
porzionali agli spazj da percorrersi,
mostra possibile nell'aria il moto,
che, appoggiandoci ai fenomeni, abbia=
mo supposto simile a quello di un
pendolo a cicloide. Ho detto, pos=
sibile, perchè l'aria è capace di
ricevere in se stessa delle vibrazioni,
che non sono dotate della mentovata
regolarità. Una corda solida DHB

si allontanasse

si allontani sensibilmente dalla linea retta DC, di modo che si alteri sensibilmente la sua connata tensione. Nelle prime oscillazioni di questa corda, e conseguentemente anche in quelle, che si comunicano all'aria non si verifica la proprietà, che le forze acceleratrici seguono la ragione degli spazj da percorrersi. ~~Problema III.~~

Determinare la velocità, colla quale si propaga il suono.

IX. Suppongasi la semicorda solida DC, che per quello riguarda la lunghezza $\frac{1}{2}L$, la massa $\frac{1}{2}m$, la elasticità D si conformi intieramente alla semicorda aerea AB. Suppongasi inoltre, che la corda DC sia ripiegata nella curva DHB, di modo che la retta BC si eguagli a quello spazio = AD = c, che facendo una mezza oscillazione scorre prima il punto A, ed indi gli altri componenti la corda di aria AB. Nello ~~Dimostrazione~~ Schediasma IV. dove ho trattato della figura, a cui si adatta una corda tesa che si vibra, mi è riuscito di scoprire, che la forza acceleratrice di un punto qualunque di ~~una~~ tali corde a per esempio di DHB, al qual punto resta da scorrere lo spazio y per restituirsi nella linea ~~in quella della~~ retta DC, si eguaglia a $\frac{4b^2 Dy}{c^2 Lm}$, ch'è quella forza appunto che accelera i punti aerei nella corda AB, quando loro rimane da passare lo spazio y. Dirigonsi insieme i due punti B della corda solida, A della corda fluida, e fatta la riflessione, che vibrandosi per eguali spazj vengono in siti analoghi animati da pari

forze

forze acceleratrici; concluderemo che nelle loro oscillazioni si impiegano un pari tempo [tempi]. Ma il punto B e tutta la corda DHB sono ..., e di più in tempo in cui il punto A si vibra per lo spazio $= AP = c$, il suono si propaga da A sino in B; dunque nel tempo che la corda z D c forma mezza oscillazione, il suono scorre la metà della sua lunghezza, e per conseguenza ~~in tempo~~ nell'istante che la corda viene ha compiuta una intera vibrazione, il suono ha scorso per uno spazio eguale alla lunghezza della medesima corda.

Ho fatto vedere nello stesso ~~Dissertazione~~ Schediasma, che chiamata h la lunghezza di un pendolo a secondi, e t il tempo di una intera vibrazione della corda a D C espresso parimente in secondi, si verifica la formola $t = \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{Lm}{ph}}$, la quale giusta a quanto si è da me dimostrato, serve parimente a determinare la velocità del suono, o sia la distanza L a cui si propaga nel tempo t.

Nomino a l'altezza, a cui si sostenta nel barometro il mercurio, G la sua gravità specifica, o densità, g la densità dell'aria, e sarà la sua elasticità dell'aria $p = aG$, e la massa della corda $m = Lg$. Sostituiti nella suddetta equazione in cambio di p, e di m i trovati valori, ~~notiamo~~ ed effettuati i necessarj calcoli, avremo

$$\frac{2b}{c}\sqrt{\frac{aG}{g}} = \frac{L}{t}$$

velocità del suono, che sendo equabile si agguaglia allo spazio scorso nel tempo, in cui si percorre.

~~Corollario I.~~

x. Il celebre Sig. Eulero è stato il primo, che

che nella sua Opera, Tentamen novae theoriae musicae ha osservato, che la corda d'aria rinchiusa in una canna di organo fa le sue vibrazioni colle medesime leggi di una corda solida tesa. Quindi la corda d'aria nella canna contenuta, e quella corda solida, che abbiamo superiormente supposta totalmente conforme ad una corda d'aria nella elasticità, nella massa, e nella lunghezza sarebbero unisone. Ma nel tempo che la mentovata corda solida fa una vibrazione, il suono viaggia per uno spazio eguale alla lunghezza di essa corda; dunque anche nel tempo d'una vibrazione di una canna di organo, il suono si propaga ad una distanza eguale alla lunghezza della corda d'aria dalla canna compresa. Ho nientedimeno nominata la lunghezza della corda d'aria, che la lunghezza della canna; perchè ~~vedremo in progresso~~, conforme che quella è un po' più grande di questa.

a abbiamo veduto nello Schediasma V. al numero XVI. nella d'

Corollario XI.

XI. Il suono forte o debole dipende dalla grandezza maggiore o minore dello spazio c, che dinota lo spazio scorso dalle particole aeree mentre fanno una mezza oscillazione. Ora essendo b il quadrante di circolo descritto col raggio c, ne segue, che qualunque sia grandezza si assegni a c, è sempre costante il valore della frazione $\frac{2b}{c}$, da cui si esprime la proporzione del semicircolo al raggio, o pure del circolo al diametro. Questa riflessione ci addita la conseguenza, che

che i suoni deboli, e forti camminano con pari velocità.

Corollario III

Lo stesso si verifica dei suoni gravi ed acuti. Ed in fatti la velocità del suono $\frac{L}{t}$ si eguaglia alla quantità $\frac{nb}{c}\cdot\sqrt{\frac{aGh}{g}}$, in cui non ci entra alcun elemento dipendente dalla gravità, e dalla acutezza del suono.

Corollario IV

Essendo costante la quantità $\frac{nb}{c}$, come pure nella medesima regione la lunghezza del pendolo a secondi, ne segue, che conforme a quanto ha dimostrato il Cavalier Newton nella proposizione XLVIII del libro secondo dei suoi Principj Matematici, la velocità del suono $\frac{nb}{c}\cdot\sqrt{\frac{aGh}{g}}$ sta in ragione composta, diretta suddiplicata della forza elastica dell'aria, o sia del peso premente dell'aria, ed inversa parimente suddiplicata della densità dell'aria medesima. Ora purchè non si alteri gran fatto il grado del calore in una data stagione, la densità dell'aria serbano la proporzione dei pesi prementi almeno prossimamente, e quindi o cresca o cali il peso della atmosfera, non si turba la velocità del suono. Variata stagione si muta la relazione fra il peso comprimente e la densità dell'aria, e questa mutazione diviene notabile nelle stagioni opposte di estate, e di inverno, nelle quali il suono viaggia con velocità sensibilmente diversa. Hanno osservato il Dottissimo Signor Lodovico Bianconi, ed i Sig.ri Accademici Bolognesi, scorrere il suono la distanza dalla Osservanza a Fortunobuono, la estate in secondi 26 ½, la inverno in secondi 29 ½. A norma di ciò il

suono

## Schediasma VIII.

Il suono è alquanto più veloce in quella regione che in questa nella ragione di 79 : 76, o sia prossimamente come 27 : 26 che è la inversa dei tempi a percorrere lo stesso spazio impiegati. In riguardo alle densità $g$ dell'aria corrispondenti nelle contrarie stazioni allo stesso peso inspirmente a $G$, stanno esse in proporzione inversa dei quadrati delle velocità dei suoni $\frac{L^2}{t^2}$, come chiaramente deducesi dalla formola $\frac{2b}{c} \cdot \sqrt{\frac{aGh}{g}} = \frac{L}{t}$, in cui posta costante la quantità $\frac{2b}{c}\sqrt{aGh}$ si trova sempre $\frac{1}{g}$ come $\frac{L^2}{t^2}$. La densità adunque dell'aria di inverno crescerà sopra quella dell'aria di estate come $27^2 : 26^2$, o sia adequatamente come 14 : 13.

### Scolio I

XIII. Per ridurre a computo la velocità del suono, cioè a dire lo spazio scorso in un dato tempo e per esempio in un secondo, egli è d'uopo assegnare alle specie analitiche componenti la nostra formola i loro valori. E facendo $t = 1$, la frazione $\frac{2b}{c}$ dinotante la ragione fra la circonferenza circolare e il suo diametro $= \frac{355}{113}$, la lunghezza $h$ del pendolo a secondi $= 36\frac{17}{24}$ oncie del piede real di Parigi, l'altezza media, a cui si sostenta il mercurio nel barometro, espressa per $a = 28$ oncie. Resta da determinarsi la quantità $\frac{G}{g}$, o sia la proporzione fra la densità del mercurio, e dell'aria. In due maniere può conseguirsi la densità dell'aria, o comprendendo con essa anche le esalazioni, o pure dalla stessa escludendo le esalazioni terrestri. Nel primo modo stando la gravità specifica del mercurio a quella dell'acqua come 13593 : 1000, e la acqua

gravità all'aria

gravità specifica dell'acqua a quella dell'aria unita colle esalazioni terrestri come 470 : 1, troveremo la proporzione tra le densità del mercurio e dell'aria sopradetta, come 11,82591 : 100, e per conseguenza la gravità $\frac{g}{g}$ = $\frac{1182591}{100}$. Sostituiti nella formola $\frac{2b}{c} \cdot \sqrt{\frac{aGh}{g}} = \frac{L}{t}$ gli stabiliti valori, ed adempiute le necessarie operazioni, scopriremo che il suono in un secondo dovrebbe scorrere lo spazio L = 10948 oncie = 912 piedi parigini, mentre di fatto scorre in 456 oncie = 1038 piedi.

Ha ottimamente avvertito il cavalier Newton essere nell'aria delle particole eterogenee, acqua, terre, saline &c., le quali essendo poco elastiche, e mancanti, non son atte a concepire le vibrazioni sonore. Stando adunque quelle particole in quiete, il moto sonoro si propagherà più celeremente per la sola aria vera, e ciò in moltiplicata ragione della minore materia. Leggesi nel secondo Tomo del Saggio delle Transazioni Anglicane compendiate dal Sig.r Lowthorp, che il Sig.r Derham ha con accuratissime sperienze trovato, caminare il suono con pari velocità, o sia l'aere sereno, o sia offuscato da folta nebbia, nel qual caso è impregnatissimo di acqua. Conferma ciò a meraviglia l'avvertenza del Sig.r Newton, e ci fa toccare con mano, che quell'accrescimento di densità, che le particole eterogenee producono nell'aria, non va computato, quando si tratti di scoprire la densità dell'aria nuova, per cui sola,

esclusa

escluse le materie di diverso genere con essa mescolate, si propagano i suoni.

La mentovata formola, poco sempre comoda per istabilire la densità dell'aria, ancora prendendo siccome data la velocità del suono giusta le fatte l'anno 1734. dai Sigg.ri Cassini di Toury, Maraldi, M. Della Caille diligenti esperienze, le quali ci insegnarono, ch'esso viaggia 1038 piedi parigini = in 4360 oncie in un minuto secondo. Effettuati i calcoli in conformità di una tale idea, passiamo presentare $\frac{G}{g} = \frac{15294}{1}$, espressione da cui si deduce, che quando nelle stagioni medie di primavera, e di autunno il suono cammina 1038 piedi in un minuto secondo, la densità del mercurio si riferisce a quella dell'aria pura nella proporzione di 15294 : 1.

15294

Scolio III

XIV. Col mezzo della proprietà dimostrata nel numero (X), che nel tempo, in cui una canna di organo fa una vibrazione, il suono si propaga per uno spazio uguale alla lunghezza della corda di aria contenuta dentro la canna, si determinerebbe la celerità del suono, purchè fosse nota la esatta proporzione fra le lunghezze di una canna di organo, e della corda nella canna rinchiusa. Il celebre M. Sauveur con replicatissimi esperimenti scoperto, che una canna di organo lunga 5 piedi fa in un minuto secondo giusta il suo metodo di computare vibrazioni 102 composte di un andata e di un ritorno, equivalenti a 204 numerate all'uso comune. Ora giacchè i numeri delle vibrazioni della canne di organo, che si compiscono in pari tempo, stanno in ragione inversa delle loro lunghezze, ne segue, che una

La lunghezze di una canna di once 60, e della corda aerea in essa contenuta si corrispondano nella ragione 60 : 61 1/17; e poichè conforme i replicatissimi esperimenti dello accuratissimo M. Sauveur la corda, che si agita dentro la nominata canna, fa in un minuto secondo giusta il suo metodo di computare vibrazioni 102 composte di un andata e di un ritorno, equivalenti a 204 numerate all'uso comune; s'impiegherà in una vibrazione la parte di secondo $\frac{1}{204}$, ed in questo tempo il suono scorrerà lo spazio 61 1/17 eguale alla lunghezza della nostra corda. Ora essendo gli spazi passati dal suono,

una canna lunga 1020 piedi si im=
piega un secondo in ogni sua vibrazione.
Quindi se la corda di aria contenuta dentro
la canna fosse tutta lunga quanto la
canna, scorrerebbe il suono 1020 piedi
in un minuto secondo. Ma realmente
ne scorre 1038; dunque egli è di uopo [fa di uopo]
dire, che, per motivo di varie replicate
riflessioni, si segua dentro la canna una
corda tortuosa, la cui lunghezza si riferisca
a quella della canna nella ragione
di 1038 : 1020, o sia, prossima=
mente di 58 : 57 ~~[illegible] 20~~. ~~Le pareti della~~
canna impediscono, che il tremito so=
noro non si comunichi all'aria, che es=
ternamente tocca la canna stessa. Perciò
succedono innumerabili urti delle parti=
cole aeree contro i lati della canna, ai
quali corrispondono altrettante riflessioni,
ed effetto delle quali, e delle riflessioni
si è l'allungamento notato della corda
di aria nella canna medesima.

La tortuosità delle corde di aria contenute
nelle canne si conferma mirabilmente
colle seguenti esperienze. Feci lavorare
tre canne 1, 2, e 3 (fig. 3) egual=
mente lunghe oncie 11 linee 2 1/2 del
piede di Parigi, e pari di diametro nel
sito della bocca AB dove si genera il
suono. La prima era cilindrica, la
seconda un frusto conico convergente,
la terza un frusto conico divergente.
Il diametro CD della estremità della
seconda canna era la metà del diametro
CD = AB della prima, ed all'opposto
la terza canna aveva il diametro CD
doppio di quello della prima canna
cilindrica

che si muove equabilmente,
proporzionali ai tempi, avremo
$\frac{1}{204} : 1 :: 81\frac{1}{17} : 12450$,
ed il quarto termine dell'ana=
logia ci manifesta che il suono
in un minuto secondo si diffonde
alla distanza di once 12450
conchiudendo come nel luogo
citato, che è
equivalente a piedi 1038.

cilindrica. Suonandosi la canna convergente 2, dovranno dentro la stessa seguire più riflessioni, che nella canna cilindrica 1, e seguirsi conseguentemente in quella una corda più lunga, che in questa. Tutto al rovescio sottraendosi, per dir così, all'urto dell'aere le pareti della canna divergente 3, la corda vi seguirà meno contorta, e sarà più corta di quella, che nella canna cilindrica è contenuta. A norma di ciò la canna convergente dovrà produrre un suono più grave della canna cilindrica, e la canna divergente un suono più acuto. L'esperienza corrisponde interamente alla espettazione, ed essendo la canna rotonda unisona al B del nostro Gravicembalo, rende la seconda suonare il B♭ e la terza il C. XVI.

XV. Il dottissimo Signor Luigi De la Grange nelle sue *Ricerche sopra la natura, e la propagazione del suono* contenute nel Tomo primo della Regia Società di Torino condanna il metodo da me seguito, col quale l'incomparabile Cavalier Newton la velocità del suono determina, affermando che questo metodo è fondato sopra due condizioni, che distruggono interamente quelle, che dipendono dall'azione mutua esercitata dalle particole aeree in virtù delle loro forze repulsive. Le due condizioni sono: 1.ma che i movimenti di tutte le particole siano espressi dal medesimo luogo geometrico: 2.da che queste particole si comunichino il moto in tempi uguali; di modochè passino tutte successivamente per i medesimi gradi di velocità. Prima di ogni altra cosa avverto essere l'idea, che le particole di aria si fuggano con forze in ragione inversa delle distanze, anzi matematica, che fisica. Ha veduto il Lettore, qualmente nello Schediasma II. ho stabilita la legge, che

Aggiunta fatta l'anno 1766.

che le densità dell'aria sono proporzionali ai pesi comprimenti, e per conseguenza anche alle elasticità dello stesso fluido, che colle forze comprimenti fanno equilibrio.

XVI. Richiedo permissione a questo illustre Scrittore di adattare alla propagazione del suono un discorso simile a quello, che ho fatto in riguardo alle corde vibranti nei numeri XXXXVI. e XXXXVII. dello Schediasma IV. Le ordinate AD, GH (fig. 30.) della curva DHB si eguagliano agli spazj scorsi per la direzione AB dai punti aerei A, G, quando il suono si è propagato da A sino in B. Dallo spazio AD allo spazio nullo passato dai punti A, B si dee far transito gradatamente con qualche legge, che richiedendo di esser fornita del necessario requisito della continuità, ha da potersi rappresentare con una curva. Ritenuta la preparazione, e le denominazioni del numero VII. ho quivi dimostrato, che la particola LG è spinta dalla forza sollecitante $\frac{P\,ddq}{dx}$ proporzionale alla seconda differenza della ordinata $GH = q$. Per la stessa ragione la particola ML verrà stimolata dalla forza $P.\frac{ddq+d^3q}{dx}$ proporzionale alla seconda differenza della ordinata $LO = q+dq$. Il punto G nel tempo $dt$ scorra lo spazio $NO = dz$: dimando quale spazio nello stesso tempo passerà il punto L, supposto che le forze mentovate imprimano moto soltanto nelle rispettive particole. Chiamo $LO = q+dq = q'$, e per conseguenza $PQ = dq+ddq = dq'$, e $ddq+d^3q = ddq'$, e nomino altresì $u$ la velocità della particola LG, ed $u'$ quella della particola uguale ML. Sia inoltre come nel numero IX. $a$ l'altezza, a cui si sostiene il mercurio nel barometro, G la sua gravità specifica o densità, $g$ la densità dell'aria, onde si abbia l'elasticità della stessa $P = aG$, e la massa di ciascuna particola LG, ML uguale a $g\,dx$. Avremo pertanto per la nota formula $\frac{aG\,ddq}{dx}.dt = g\,dx.du$, e $\frac{aG\,ddq'}{dx}.dt = g\,dx\,du'$; dunque $ddq : du :: ddq' : du'$; ma $du = \frac{ddq}{dt}$;

dunque

Dunque $du' = \frac{ddq'}{dt}$, e quindi se il punto G cammina nel tempo dt lo spazio $NO = dq$, dal punto L si viaggerà nel tempo stesso per lo spazio $PQ = dq'$, posto che ciascuna forza acceleri solamente la sua particola: condizione necessaria, acciocchè si possano usare le formole sovrapposte.

XVII. Si osservi che passando il punto G lo spazio NO, ed il punto L lo spazio PQ, &c., la curva DHB si trasferisce per lo spazio $LG = dx$ da A verso B, ed il suono nel tempo dt ha avanzato cammino per l'elemento dx. Si osservi di più che il punto G passa lo spazio NO un tempicello avanti scosso dal punto L, ed il punto L lo spazio PQ un tempicello avanti scosso dal punto M, e così di mano in mano; laonde tutti i punti fanno transito per gli stessi gradi di movimento regolati sempre dallo stesso luogo geometrico, ed il moto si comunicano in tempi eguali. Queste conseguenze nascono necessariamente dalle formole del Signor Luigi ridotte al giusto, le quali ci guidano alle medesime condizioni Newtoniane, che ha giudicato ripugnanti alla natura dell'aria.

Nelle formole $\frac{aG\,ddq\,dt}{dx} = g\,dx\,du$, $\frac{aG\,ddq'\,dt}{dx} = g\,dx\,du'$, &c. relative alle particole LG, ML, &c. si sostituiscano in cambio di du, du' i determinati valori $\frac{ddq}{dt}$, $\frac{ddq'}{dt}$, &c.; e notando $\frac{aG\,ddq\,dt}{dx} = \frac{g\,dx\,ddq}{dt}$; $\frac{aG\,ddq'\,dt}{dx} = \frac{g\,dx\,ddq'}{dt}$, &c., ci accorgeremo che ciascuna ci dà $aG\,dt^2 = g\,dx^2$, o sia $\sqrt{\frac{aG}{g}}\cdot dt = \pm dx$, ed integrando senza l'aggiunta della costante; perchè si suppone che nel punto A cominci la propagazione del suono, $\sqrt{\frac{aG}{g}}\cdot t = \pm x$. Volendo esprimere il tempo per secondi, e dinotando $\frac{2b}{c}$ la relazione fra la circonferenza del circolo ed il suo diametro, ed h la lunghezza di un pendolo a secondi, la formola prenderà l'aspetto seguente $\frac{2b}{c}\sqrt{\frac{aGh}{g}} = \pm\frac{x}{t}$,

e ci

e si manifesterà che la velocità del suono non dipende nè dalla curva DHB, nè dallo spazio minore o maggiore, per cui rendendo un suono piano o forte si muovono le particole aeree, nè dal tempo più breve o più lungo impiegato a percorrerlo, nel quale l'acutezza o la gravità del suono consiste, ma soltanto dalla quantità $\sqrt{\frac{aGh}{g}}$; che essa velocità è equabile, stando costantemente lo spazio scorso come il tempo speso a passarlo; e che finalmente il suono ugualmente si diffonda e da A verso B, e per la direzione contraria.

Ha creduto il nostro celebre Autore, che ad ogni particola di G, MK corrispondesse una formola diversa; e che integrando tutte queste equazioni, e raccogliendo i valori per ciascuna incognita $q$, $q'$, $q''$, &c. espressi per la stessa variabile $t$, si potessero determinare i movimenti di tutte le particole, per le quali il suono propagasi. Ma essendosi da me dimostrata l'identità delle mentovate formole, chiaramente si scopre che i predetti valori trovar non si possono, e che dai movimenti delle particole aeree la velocità del suono non ha dipendenza.

XVIII. Benchè non riesca di scoprire la curva DHB, si stabiliscono nulladimeno alcune proprietà, delle quali essa deve fornirsi. E primieramente deve toccare nel punto B l'asse AB, ed esser quivi combaciata da una parabola Apolloniana.

In fatti supposta BG infinitesima, la forza acceleratrice, che nel principio del moto stimola tutta la particola, fa scorrere alla particola BG un arco spaziato GH proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerlo; ma questo tempo sta in ragione dello spazio GB in esso tempo camminato dal suono; dunque GH come $GB^2$, e per conseguenza la curva HB è combaciata da una parabola Apolloniana. Intanto non si può di meno di inferire, che nel principio del movimento le particole aeree si accelerano colla legge di un grave cadente.

In secondo luogo rispettivamente a quelle particole, che si

che si accelerano, la curva DHB volta il convesso verso l'asse AK, ed in riguardo a quelle, che si ritardano, volge il concavo: condizioni necessarie, acciocchè in un caso le forze spingano da A verso B, e nell'altro da B verso A. Finalmente se le forze acceleratrici serbino la ragione di una funzione della distanza HG = IC dal punto medio C della vibrazione, la qual funzione sia = 0, quando la distanza è nulla; il tempo speso a scorrere lo spazio GH seguirà la proporzione dell'arco corrispondente AK di una specie di elisse, di cui AKZ è un quadrante. E conciossiachè in questa supposizione la particola LG, in pari distanza HC dal punto C, una positiva, e l'altra negativa, dotata della stessa velocità, passerà ambo i transiti lo spazio NO nel tempo dt, se la curva DHB determina gli spazj passati dalla particola aerea nello istante, in cui il punto A ha compiuta una mezza vibrazione; la curva, le cui ordinate pareggiano gli spazj scorsi dalla detta particola nell'istante, in cui dal punto A si è terminata una vibrazione, si formerà replicando il ramo DHB, e collocando il secondo ramo rigirato al primo, come nella figura 16. i rami SAT, rispettivamente al ramo ST.

XIX. Sembra un paradosso al Signor de la Grange, che qualunque sia la legge, colla quale si vibrano le particole aeree, resti sempre costante la velocità del suono. Ma se non si turba la detta velocità, quando le particole d'aria scorrono maggiori, o minori spazj nello stesso tempo, o anche in tempi diversi; e perchè non può rimanere invariata, qualora si muta la legge del moto nelle mentovate particole? Dica il nostro profondo Analista, che siccome una corda solida sollecitata in qualunque modo produce sempre le vibrazioni adattate alla sua natura; così parimente dee avvenire di una corda fluida. Io gli ricorderò questo punto: ma

nello

nello stesso tempo gli dimanderò in che consista la vibrazione della corda fluida. Ora io sostengo che l'essenziale vibrazione di essa corda consiste nella comunicazione del suono dall'una all'altra estremità; la quale si farà sempre nello stesso tempo, in qualsivoglia guisa si vibrino le particelle dell'aria. Il mio argomento acquisterà maggior forza colla riflessione, che ancora nelle corde solide si cangia la legge dei movimenti delle particole, e nulladimeno rimane intatto il tempo delle loro vibrazioni. Si adatti la corda ad una delle innumerabili figure, nascenti dalla mistura di varj suoni, e benchè i moti componenti seguitino la legge dei pendoli in cicloide in riguardo alle distanze dai punti medj delle rispettive vibrazioni, i moti composti, o assoluti sembrano regola, senza che si alteri il tempo speso in una vibrazione, o sia nel trapassare da uno stato all'altro de' paralleli.

XX. Si è dato a credere il celebre Signor Cramer di chiaramente scoprire le imperfezioni del metodo Newtoniano, provando che ammesso un tal metodo, l'aria si potrebbe movere colla legge di un grave cadente ... egli è di uopo qui distinguere due circostanze, cioè o che gli spazj scorsi dalla particola neran sono minimi ... ovvero di assai maggiore grandezza. Nel primo caso tanto non è assurdo, che la particola d'aria si accelerino colla mentovata legge, quanto che ho di sopra mostrato al numero XVIII. ... la natura delle loro vibrazioni, nel cominciamento del ... si adattano. Che se si pretendesse che dovesse continuare un tal moto per uno spazio non minimo, dirò che la supposizione appartiene piuttosto alla Geometria, che alla Fisica. ~~Sia tanto che ... piccolissima la compressione delle particole (fig. ...) M.L, L.C, etc., in ... tempo breve, ... saranno esse sulla linea retta Ak ... se la compressione troppo si accresca, e ...~~

saranno ... ;

il

~~sovvertiamento, è fisicamente impossibile~~
~~che non scappino da un lato, o dall'altro~~, e
~~che il moto non si disturbi... ciascuna necesso~~
~~Aggiungasi che~~ il metodo del Cavalier Newton è fondato sopra le ipotesi, che sieno (fig. 30.) NQ, PQ minima rispettivamente ad LG, ML; nè da essa dobbiamo partirci. La legge di moto, di cui si parla, richiede che la curva BHD sia una parabola Apolloniana, in riguardo alla quale, comunque sia grande il parametro, si può sempre determinare una tale ascissa BG, che le linee HN, NQ si corrispondano in proporzione prima. Ora il supporre che le particole aeree proseguendo il movimento passino spazj = GH maggiori di quello comporta la loro minima compressione, egli è un totalmente sovvertire il metodo Newtoniano. Esige con tal metodo che la particola aerea scorrendo spazj minimi, prima accelerandosi, e poscia ritardandosi, passerà dalla quiete al moto, ed indi dal moto alla quiete, onde le compressioni non sormontino mai gli stabiliti confini.

XXI. Torno allo stimatissimo Signor de la Grange, e noto che le conseguenze dedotte dalla sua soluzione si fanno toccar con mano, che dalla verità si allontana. Stabilisce egli adunque che in ciascuna particola d'aria i movimenti sono istantanei, e si comunicano sempre colla medesima velocità costante, qualunque sia l'urto impulso; che la prima particola abbia ricevuto; da quale dipende la forza motrice della terza; dobbiamo [illegible] giungendone nè intendersi questi moti istantanei, e non pertanto sensibili, i quali, se pure non prendo errore, non si danno in Natura. La sperienza ne insegna che al cessare delle vibrazioni sonore, cessa il moto delle particole aeree; e quindi acciocchè una particola ritorni a muovere, ci è bisogno d'una nuova vibrazione del corpo sonoro.

sonoro. Dunque, dico io, dee prima questa particola accelerarsi, ed indi ritardarsi, ed impiegarvi nella accelerazione, e ritardamento un tempo preciso eguale a quello, che spende in una vibrazione il corpo sonoro, che sempre stimola l'aria, ed è la cagione de' suoi movimenti.

Dico di più che la legge di accelerazione, e di ritardamento ha da dipendere da quella, con cui si vibra il corpo sonoro. Fingasi un corpo, che si vibri con tal legge, che le forze stiano come i quadrati della distanza dal punto medio della oscillazione, e sia lo stesso unisono ad uno de' nostri corpi sonori, e produca anche un suono ugualmente forte. Sembrami fuori di dubbio che l'orecchio dovrebbe sentire questi suoni di indole varia; e pure secondo il nostro Autore non avrebbe da trovarvi differenza veruna.

Egli è noto che fatta sonare una corda, si pone altresì in tremito una corda vicina corrispondente all'unisono. Se i movimenti dell'aria sono analoghi a quelli della corda agente nelle oscillazioni, e nelle reciprocazioni; chiaramente si vede che si comunicheranno alla corda unisona, siccome quelli che perfettamente seconderanno le sue vibrazioni.

XXII. Dove il Signor De la Grange per necessaria conseguenza della sua soluzione la diversità fra i suoni gravi, ed acuti nel numero dei colpi istantanei, che in pari tempo riceve l'orecchio: ed io sostengo che ciò non basta. Si diano due corde unisone, che si vibrino colla condizione; che mentre la prima corda ha fatta mezza vibrazione, la corda seconda dia alla vibrazione principio. Ricevendo l'orecchio da queste corde lo stesso numero di colpi, che riceve da una corda sola, che colle predette forma ottava acuta, dovrebbe sentire giusta il Signor De la Grange in ambo le circostanze lo stesso suono; il che alla sperienza ripugna.

Al

Al numero dei colpi adunque bisogna aggiungere la durazione dei colpi medesimi accompagnata dal loro regolare aumento, o decremento.

XXIII. Debbo per altro render giustizia al nostro quanto dotto, altrettanto ingenuo filosofo, il quale cangiata opinione nelle <u>Novelle Ricerche sopra la natura, e la propagazione del suono</u>, che si leggono nel secondo Tomo della Regia Società di Torino, afferma alla pag. 510: che l'agitazione di ciascuna particola dura precisamente quel tempo, che l'onda si mette a percorrere tutta la sua larghezza, e che tutte le particole soggiacciono alla medesima agitazione dipendente dalla natura di tutto l'impulso primitivo.

XXIV. Il Cavalier Newton nel determinare la velocità del suono ha seguito il metodo, ricordato dall'incomparabile Galileo, di appoggiarsi ai fenomeni, e di dedurne dimostrativamente le conseguenze. Gl'insegnarono gli esperimenti che il suono propagasi equabilmente per l'aria, e che questa si porta all'orecchio fra gli altri suoni anche quelli, che sendo costanti di tuono, differiscono solamente nel piano, e nel forte. Da una tal proprietà egli dedusse, che siccome un corpo sonoro, il quale facendo le sue vibrazioni più ristrette, o più dilatate non cangia tuono, dee necessariamente vibrarsi colla legge di un pendolo in cicloide; lo stesso ha parimente da succedere nelle particole di aria poste in agitazione dal detto corpo. Restava da vedersi, se le particole collocate nella stessa linea o raggio, che ha per centro un punto del corpo sonoro, si vibrino per eguali spazj, o pure se questi spazj vadano scemando, secondochè le particole stesse sono più lontane dal corpo che suona. Tentò adunque cosa accadeva supponendo eguali gli spazj mantenuti, e vedendo che nell'aria, la cui

cui

cui forze elastiche sono proporzionali alle densità, ne nascevano tali costipazioni, che determinavano le forze acceleranti ciascuna particola in ragione della distanza dal punto medio della oscillazione giusto la legge dei pendoli cicloidali; si rese certo che si vibrano per eguali spazj le particelle dell'aria collocate nello stesso raggio sonoro. Stabiliti questi dati, gli riescì facile di trovare la velocità, colla quale il suono propagasi. Una tale strada, che penso abbia guardato alla meta il Cavalier Newton, mi sono adoperato di porla in chiaro nella presente Dissertazione I. Continuerò l'intrapreso cammino nelle Dissertazioni seconda, e terza, sperando di maggiormente dilucidare la materia, che abbiam per le mani.

Schediasma VIII.

Della propagazione dei [illegible] — Compiuto l'anno 1765 n. 11

Dissertazione [illegible]

Della propagazione del suono per linee o raggi, supponendo che al crescere della distanza dal corpo sonoro le particole aeree si vibrino per ispazj, che vadano decrescendo.

I. Nella precedente Dissertazione ho supposto, che il suono si propaghi per innumerabili raggi, che tutti partono dal corpo sonoro, e che lungo questi raggi ciascuna particola aerea si vibri per uguali spazj colla legge di un pendolo a cicloide. Dalle [illegible] [illegible] che nel [illegible] genera nell'aria, la cui densità sono proporzionali ai pesi comprimenti, ho dimostrativamente dedotto, che le forze acceleranti le particelle dell'aria sieno come le distanze dal punto medio della vibrazione; proporzione necessaria acciocchè il nostro fluido possa colla [illegible] legge oscillare. Ora [illegible] l'ipotesi che il suono si diffonda per raggi, mi avanzo a provare, che le particole aeree non possono vibrarsi a guisa di un pendolo [illegible] quando gli spazj delle loro oscillazioni sieno ineguali, e vadano sta[illegible] [illegible] che le particelle sono più rimote dal centro sonoro; imperciocchè in tal circostanza le forze acceleratrici non abbracciano la dovuta ragione della lontananza dal punto medio delle vibrazioni.

II. Quindi [illegible] ancora a torto accusato di [illegible] di principio di incompatibilità il Sig.re Newton, quando suppone che le particole si vibrino non altrimenti che un pendolo a cicloide, delle [illegible] comprese nell'aria [illegible] le forze acceleratrici conseguentemente al [illegible] Se il [illegible] del grande [illegible] supposto [illegible] al [illegible] [illegible] soggetto [illegible] le forze acceleratrici proporzionali alle distanze dal punto di mezzo delle oscillazioni anche quando le particelle dell'aria non si vibrano per eguali spazj, ma in tal caso come vedremo, le dette forze sono regolate da una legge totalmente diversa; dunque il Cav.re Newton

non è

1 Le opposizioni del Sig. Luigi della Grange le ho già riferite.

non è caduto in petizion di principio. Maravigliosa cosa si è quanti Uomini sommi e di prima sfera abbiamo veduto che ridir sul metodo del Sig. Newton. 1 Il Sig. Eulero nella Dissertazione della natura del fuoco §. 26, abbenchè sospetta la Newtoniana dimostrazione, affermandola appoggiata a deboli fondamenti. Quale il Sig. d'Alembert nel trattato de' fluidi alla pag. [illegible], che non v'è altro nelle Opere del Newton luogo più difficile, e più oscuro di questo. Nella stessa guisa si esprime il Sig. Giovanni Bernoulli nella Dissertazione della propagazione del lume §. 20. Nascondersi un non so che di incertezza nel detto luogo il Sig. Cramer deduce da ciò, che con egual successo la dimostrazione Newtoniana si può applicare ad una costruzione totalmente diversa, e anche falsa. Gli stessi Commentatori del Newton Le Seur, e Jacquier aderivano all'opinione del Cramer, e la confermavano con un esempio. Finalmente il dottissimo Sig. D. Paolo Frisi nelle Novelle letterarie pubblicate dal Sig. Ab. Lami il mese di Febbraio dell'anno 1755 condanna di manifesta petizione di principio la Newtoniana dimostrazione. Io dovrei aderire certamente, se [illegible] in un secolo, in cui della autorità [illegible] la ragione, ma la riflessione de' miei fatti poco meno libera infallibilmente il Sig. Newton dalla nota di petizione di principio. Gravissima a prima vista sembra l'opposizione del Sig. Cramer, che col metodo Newtoniano si possono attribuire all'aria infinite leggi tutte fra loro diverse di oscillazioni, e sarebbe insuperabile, quando si [illegible] che l'aria non può [illegible], salvo che a guisa di un pendolo a [illegible]. Questo fluido solamente è capace

è capace di innumerabili movimenti regolari di leggi sommamente varie, all'uno o all'altro dei quali dalla diversità delle circostanze estrinseche che resta ~~ho avvertito nella prima Dissertazione, che~~ determinato. Se la penna di un ~~tasto~~ saltarello nel gravecembalo un poco rigida, si troverà sovvente la corda, come ho anche avvertito nella prima Dissertazione, e le prime sue vibrazioni non soggiaceranno alla legge di quelle di un pendolo a cicloide. Di simil natura altresì saranno le vibrazioni da ~~percossa~~ principio comunicate all'aria, la quale porterà all'orecchio un suono falso, ed iracondo. Si deve con verità, che nella propagazione del suono l'aria si vibra non altrimenti che un pendolo a cicloide, poiché da un tal suono vengono regolate le oscillazioni di un corpo qualunque sonoro atto a produrre un suono costante in riguardo al grave, e all'acuto, e perché le accennate oscillazioni passano dal corpo sonoro all'aria, la quale come ha dimostrato il Cav.^o^ Newton può da se ricevere questo moto.

III. Ma essendo ormai tempo di accingersi alla trattazione del proposto argomento, sia ab (fig. 31.) la metà della lunghezza di un'onda aerea, ed il punto a facendo mezza oscillazione per la direzione ab passi uno spazio eguale alla linea ad perpendicolare ad ab. Supponendo descritta la curva dac, la cui ordinata qualunque ga esprima lo spazio, che scorre il punto g effettuando una mezza vibrazione, mi faccio a sciogliere il seguente problema.

## Problema.

Determinare la curva dhb, in cui qualsivoglia ordinata gh si agguagli allo spazio passato dal punto g nel momento che il punto a compiuta una mezza vibrazione ha scorso lo spazio ac.

Colle leggi delle oscillazioni di un pendolo a cicloide

velocità, ed in pari tempo viaggiano i punti G, g (Fig. 4ª Tav. VI.) per le linee GH, gh; Ga, ga spazj eguali alle nell'una e nell'altra ipotesi che lo spazio passato dalle particole aeree dopo una nuova vibrazione sia costante o variabile. Quindi nominate $Ga = AD = ad = c$, $ga = s'$, $GH = Q$, $gh = q$, si deduce l'analogia $Ga : ga :: GH : gh$; che mi suggerisce l'equazione $\frac{Ga \cdot gh}{ga} = GH$, ovvero usando i simboli analitici $\frac{cq}{s'} = Q$, e presa la differenza $\frac{cs'dq - cqds'}{s'^2} = dQ$. Nella Dissertazione precedente (ponendo $AB = ab = \frac{1}{2}d$, $AG = ag = x$, $BKD = b$) abbiamo scoperto $x = \frac{Lc}{rb}\int\frac{-cdQ}{\sqrt{2cQ - Q^2}}$. Sostituiti invece di $Q$, e di $dQ$ i ritrovati valori, ed adempiuti i necessarj calcoli, ci si presenterà

$$x = \frac{Lc}{rb}\int\frac{-s'dq + qds'}{s'\sqrt{2s'q - q^2}}$$

(I) equazione alla nuova curva $dhb$; il che &c.

Corollario

Se poi $s'$ costante, ed uguale a $c$, diviene $ds' = 0$, e si torna a trovare l'equazione

$$x = \frac{L}{rb}\int\frac{-cdq}{\sqrt{2cq - q^2}}$$

adattata alla ipotesi della prima Dissertazione.

Problema II.

Determinare la forza acceleratrice di un qualunque punto g (Fig. 4ª) dopo che ha camminato lo spazio $gh = q$, e mentre gli rimane da passare lo spazio $he = s' - q$.

IV. Collo stesso discorso usato nella Dissertazione I. si prova, che la particola di aria $lg$ viene sollecitata dalla forza $\frac{Pddq}{dx^2}$ (dinota $P$ l'elasticità della fibra $lg = dx$ prima di esser compressa; la

la qual forza diretta per la massa $\frac{m\,dx}{L}$ di essa fibra o particola si cambia in acceleratrice $= \frac{LP\,ddy}{m\,dx^2}$ (2). Dando la differenza nella equazione (1), onde si ebbe $\frac{2b\,dx}{Lc} = \frac{-dy}{\sqrt{2sy-y^2}} + \frac{y\,ds}{s\sqrt{2sy-y^2}}$ (3), e di nuovamente differenziando considerata $dx$ come costante

$$ddy = \frac{\overline{s-y}\cdot dy^2}{2sy-y^2} - \frac{y\,ds^2 + y\,dy\,ds}{2s^2 - sy} + \frac{ys\,dds + s\,ds\,dy - y\,ds^2}{s^2}\ (4).$$

Dalla equazione (3) si raccoglie

$dy = \frac{y\,ds}{s} - \frac{2b\,dx}{Lc}\sqrt{2sy-y^2}$, e $dy^2 =$ $\frac{4b^2dx^2}{L^2c^2}\,\overline{2sy-y^2} - \frac{4by\,dx\,ds\sqrt{2sy-y^2}}{Lcs} + \frac{y^2ds^2}{s^2}$.

Fatta la sostituzione di questi valori nella formula (4) ci si presenterà, effettuati i necessarj calcoli,

$$ddy = \frac{4b^2dx^2}{L^2c^2}\cdot\overline{s-y} - \frac{4b\,dx\,ds\sqrt{2sy-y^2}}{Lcs} + \frac{y\,dds}{s},$$

e dividendo per $m\,dx^2$ e moltiplicando per $LP$,

$$\frac{LP\,ddy}{m\,dx^2} = \frac{4Pb^2\cdot\overline{s-y}}{Lmc^2} - \frac{4Pb\,ds\sqrt{2sy-y^2}}{mcs\,dx} + \frac{LPy\,dds}{ms\,dx^2}\ (5);$$

ma $\frac{LP\,ddy}{m\,dx^2}$ si agguaglia alla forza acceleratrice della particola di aria $lg$, o sia del punto $g$ dopo che ha scorso per lo spazio $gh = y$, e mentre gli resta da passare lo spazio $he = s-y$; dunque anche l'omogeneo di comparazione esprime la detta forza; il che &c.

Scolio

N. La forza acceleratrice da me determinata sarebbe proporzionale alla distanza $s-y$ dal punto medio della vibrazione, conforme richiede la

la legge del moto che si suppone, se la sua espressione non contenesse altro che il solo termine $\frac{4Pb^2}{Lmc^2}.\overline{s-q}$. Nella Dissertazione I. ho trovato la forza accelerattrice $= \frac{4Pb^2}{Lmc^2}.\overline{c-q}$. Il coefficiente comune $\frac{4Pb^2}{Lmc^2}$ dimostra che in ambo le ipotesi di s costante, e di s variabile le particole aeree oscillerebbero nel tempo stesso, cioè in quel tempo, che impiega in una vibrazione il corpo sonoro. Ho assumato che il coefficiente ha il medesimo ~~valore in tutti e due gli incontri~~; ~~imperciocchè l'elasticità dell'aria dinotata dalla specie P, e la massa m corrispondente alla lunghezza del raggio sonoro~~ corrispondente alla lunghezza L, e per conseguenza anche la sua densità si suppongono costanti; e quindi è parimente data la distanza L ~~[illegible]~~ per cui viaggia il suono, mentre il corpo sonoro fa una vibrazione, la quale, come ho dimostrato nella citata Dissertazione, dalla elasticità, e dalla densità dell'aere unicamente dipende. Questa riflessione ci ~~[illegible]~~ toccar con mano, che se le particole aeree si hanno da vibrare non altrimenti che un pendolo a cicloide, ed incontro al corpo sonoro, la somma degli altri termini, cioè a dire

$- \frac{4Pb\ddot{s}}{m c s \partial x} \sqrt{a s q - q^2}$

~~[illegible]~~ $+ \frac{L P q \partial\partial s}{m s \partial x^2}$ dovrebbe uguagliarsi al nulla. Ciò chiaramente succede nella supposizione di $s = c$, in cui $\partial s$, e $\partial\partial s$ svaniscono ~~si uguagliano al nulla~~: vediamo se lo stesso possa avvenire in qualche particolare incostanza di s variabile.

~~Similmente~~ $- \frac{4Pb\,\partial s \sqrt{a s q - q^2}}{m c s \partial x}$

VI. Termini adunque ~~[illegible]~~ $+ \frac{L P q\, \partial\partial s}{m s \partial x^2}$ $= 0$, e dividendo per $\frac{Pq}{m s \partial x}$, che non può mai essere generalmente uguale a nulla, avremo

$-4b\partial s$

$-\frac{4bds\sqrt{2sq-q^2}}{c}$ 

$-\frac{4bcds+4bqds}{c\sqrt{2sq-q^2}}+\frac{Lqdds}{dx}=0$ (6). Pongo in vece di $dx$ il suo valore somministratomi dalla equazione (3), e trovo $-\frac{4bds\sqrt{2sq-q^2}}{c}+$

$-\frac{4bcds+4bqds}{c\sqrt{2sq-q^2}}+\frac{2bqs\,dds\sqrt{2sq-q^2}}{c\cdot\overline{-sdq+qds}}=0$, + e fatte le debite riduzioni,

$2q\,ds\cdot\frac{-sdq+qds}{q^2}=s\,dds$ (7)

Metto $\frac{s}{q}=z$ (8), e per conseguenza $\frac{-sdq+qds}{q^2}=dz$, $s=qz$, $ds=qdz+zdq$, $dds=D\overline{qdz+zdq}$. Effettuate le sostituzioni scopriremo $2q\cdot\overline{qdz+zdq}\cdot dz=qzD\overline{qdz+zdq}$, o sia $\frac{2dz}{z}=\frac{D\overline{qdz+zdq}}{qdz+zdq}$, e integrando, $2\log.z+\log.Adx=\log.\overline{qdz+zdq}$, e passando dai logaritmi ai numeri loro corrispondenti, $Az^2dx=qdz+zdq$ (9). Conciossiachè per la formula (3) $dx=\frac{Lc}{2b}\cdot\frac{-sdq+qds}{s\sqrt{2sq-q^2}}$, avremo sostituendo $qz$ in cambio di $s$, e $qdz+zdq$ in cambio di $ds$, $dx=\frac{Lc}{2b}\cdot\frac{dz}{z\sqrt{2z-1}}$.

Pongasi un tal valore nella equazione (9), e ne risulterà $\frac{Lc}{2b}\cdot\frac{Azdz}{\sqrt{2z-1}}=qdz+zdq$, ed integrando $\frac{ALc}{6b}\cdot\overline{z+1}\sqrt{2z-1}=qz+B$ (10).

III. A cagione di determinare la costante $B$, prendo per mano la formula (8) $\frac{s}{q}=z$, e noto che quando $x=0$, è $s=q=c$, e perciò $z=\frac{s}{q}=1$. Surrogati questi valori nella formula (10) ne risulterà

+ Anche qui noto non potersi generalmente pareggiare a nulla la grandezza $\frac{2b}{c}\sqrt{2sq-q^2}$, per cui la nostra formula si è divisa.

risultava $B = \frac{ALc}{3b} - c$. Avremo poi tosto

$\frac{ALc}{6b} \cdot \overline{z+1}\sqrt{2z-1} = y^2 + \frac{ALc}{3b} - c$, e ponendo

in luogo di $z$ il suo valore $\frac{s}{y}$, e trasportando

da una parte alle altre due porzioni,

$$\frac{ALc}{6b} \cdot \overline{\frac{s+y}{y}\sqrt{\frac{2s-y}{y}} - 2} + c = s \quad (11)$$

VIII. Resta da stabilirsi la grandezza della costante A.
La nostra equazione dee verificarsi anche quando
posta $x = \frac{1}{2}L = ab$, è $y = 0$, nel qual caso
$s$ non ha da essere certamente più grande
di $c$, potendosi ben concepire, che le particole
aeree, secondochè sono più rimote dal centro
sonoro, si vibrino per ispazj sempre minori,
ma non mai per ispazj, che vadano continua=
mente crescendo. Per togliere di mezzo qua=
lsisia ~~lunque~~ equivoco, immaginiamoci le ascissa
$x$ talmente prossima al valore $\frac{1}{2}L$, che sia
$y = \frac{s}{N}$, esprimendo $N$ un numero infinito.
In sì fatta ipotesi avremo

$\frac{ALc}{6b} \cdot \overline{N+1}\sqrt{2N-1} - 2 + c = s$, e cancellati

i termini incomparabili,

$\frac{ALc}{6b} \cdot N^{\frac{3}{2}}\sqrt{2} + c = s$. Essendo $N^{\frac{3}{2}}$
quantità infinita, per ottenere che $s$ non
superi $c$, ~~ed eccedentemente~~ e corrisponda ad
esso in ragione finita, egli è d'uopo porre
$A$ proporzionale a $\frac{c}{N^{\frac{3}{2}}}$. Fingasi le ordinata
$y$ ancora più piccola, onde abbiasi $y = \frac{s}{N^2}$
e l'equazione (11) prende la seguente forma
$\frac{ALc}{6b} \cdot N^3\sqrt{2} + c = s$, e per salvare le notate
condizioni, dovrà determinarsi $A$ propor=
zionale

zionale a $\frac{-c}{N3}$, valore infinitamente minor di quello alla prima ipotesi conveniente. Conchiudasi che per soddisfare a tutte le menome grandezze di $q$ ~~[illegible]~~ è necessario mettere $A=0$, onde ne risulti $s'=c$; e quindi la quantità ~~[illegible]~~ $-\frac{4Pb\,ds\cdot\sqrt{2sq-q^2}}{mcs'dx}$ $+\frac{LPq\,dds}{ms'dx^2}$ non può salve le circostanze del Problema eguagliarsi a nulla, senon nella supposizione di $s'=c$, cioè a dire che tutte le particole d'aria situate in un raggio sonoro si vibrino per eguali spazj.

~~[illegible]~~

IX. Illustreremo via più la verità ora dimostrata, supponendo che la curva $dac$ sia una delle infinite iperbole fra gli asintoti espresse dalla equazione $\frac{ec^n}{s'^n} = e+x$ (12), in cui giusta la condizione del Problema, posta $x=0$, si trova $s'=c$, e determinando il valore o dello esponente $n$, o della costante $e$, che fa svanire la quantità ~~[illegible]~~ $= -\frac{4Pb\,ds\cdot\sqrt{2sq-q^2}}{mcs'dx}+\frac{LPq\,dds}{ms'dx^2}$.

Differenziò la formola (12), e mi si presenta $-\frac{nac^n ds'}{s'^{n+1}} = dx$, e nuovamente differenziando, $\frac{\overline{n+1}\cdot ds'^2}{s'} = dds'$. Sostituisco questi valori, e dopo le convenienti operazioni mi si presenta la nostra grandezza, che deve uguagliarsi al nulla

$$\frac{4Pb\,s'^n\sqrt{2sq-q^2}}{mnac^{n+1}} + \frac{\overline{n+1}\,LPq\,s'^{2n}}{mn^2a^2c^{2n}} = 0 \quad (13)$$

Ora una tale equazione non può avverarsi relativamente a qualunque coppia di valori corrispondenti di $s'$, e di $q$, salvo che nella

nella supposizione di a, o di n infiniti
e voglia il vero, dovendo essere s, e q
sempre minori di c, la quantità $\frac{s^n \sqrt{2sq-q^2}}{c^{n+1}}$
è più piccola della unità, e quindi il primo
termine discende all'infinitesimo, allora
che a, ovvero n ascendano all'infinito.
Nel secondo termine abbiamo $\frac{s^{2n}}{c^{2n}} < 1$
ed anche questo diviene minimo, se a,
o n sono infiniti. Ora poi uniamo la
formola (12) $\frac{ac^n}{s^n} = a + x$, e fingendo
$a = \infty$, cancellata la grandezza x rela=
tivamente nulla, avremo $ac^n = as^n$,
e conseguentemente $s = c$. Vogliasi
$n = \infty$, ed assumendo nella formola (12)
la radice n, avremo $a^{\frac{1}{n}} c = \overline{a+x}^{\frac{1}{n}} \cdot s$;
o adequatamente $a^0 \cdot c = \overline{a+x}^0 \cdot s$: ma
$a^0 = \overline{a+x}^0 = 1$; dunque anche in tale
ipotesi $s = c$.

X. Ho asserito, che l'equazione (13) non può gene=
ralmente verificarsi, se non se nella circos=
tanza di a, o di n infiniti. La formola
che esprime la relazione fra s, e q ci vie=
ne suggerita dalle equazioni (1), e (12),
ed è la seguente

$$\frac{2c}{nb}\int\frac{-sdq+qds}{s\sqrt{2sq-q^2}} = \frac{ac^n}{s^n} - a \text{ , o sia}$$

$$\frac{2}{nb}\int\frac{c.-sdq+qds}{s\sqrt{2sq-q^2}} + a - \frac{ac^n}{s^n} = 0.$$

Nel ~~[illegible]~~ numero III. l'espressione $\int\frac{c.-sdq+qds}{s\sqrt{2sq-q^2}}$
l'ho dedotta dall'altra $\int\frac{-cdQ}{\sqrt{2cQ-Q^2}}$ mettendo
$Q = \frac{cq}{s}$: ma l'ultima sommatoria è uguale
all'arco di cerchio descritto col raggio c,
il cui

il cui seno $c - \frac{cq}{s} = c - \frac{cq}{s} = c \cdot \frac{s-q}{s^2}$; dunque

$$\int \frac{c \cdot -s\,dq + q\,ds}{s \sqrt{2sq - q^2}} = \text{Arco Raggio } c \text{ Seno } \frac{c \cdot s-q}{s^2}, \text{ e}$$

perciò $\frac{L}{2b} \cdot \text{Arco Raggio } c \text{ Seno } \frac{c \cdot s-q}{s^2} + e - \frac{ac^n}{s^n} = 0$ (14)

Concciossiachè questa formola è costantemente eguale a nulla assegnata ad s, q qualsivoglia coppia di valori relativi, se ciò si adempiesse anche nella formola (13), dovrebbe darsi identità fra le due formole, conseguenza patentemente falsa, quando a, ed n stiano dentro i limiti del finito. Che se a, od n si suppongono infiniti, l'equazione (13) si trova sempre uguale a nulla, non perchè così richiedano i valori corrispondenti di s, e di q, ma a ragione soltanto della divisione per una grandezza infinita.

Scolio.

XI. Dopo aver letta, e ponderata la dimostrazione, che supposto propagarsi il suono per innumerabili raggi, le particole aeree in rigor matematico deggiono vibrarsi per ispazj uguali, se come richiedono le oscillazioni colla legge dei pendoli a cicloide, le forze acceleratrici hanno da corrispondersi in ragione delle distanze dal punto medio della vibrazione; qualcuno forse mi dimanderà, se veramente io sia persuaso che gli spazj, per cui si vibrano le particole d'aria anche più rimote da' corpo sonoro, non si diminuiscano punto. Rispondo ch'io credo che i detti spazj vadano scemando, e che estinguendosi in molta distanza il suono, si riducano al nulla: ma che penso nel tempo stesso che decrescano a lentissimo passo; di modo che sia fisicamente vero, che oscillino per uguali spazj le particole situate nello stesso raggio poco lungi dalle altre distanti. Se n, od a si fingono infiniti nella formola (13), le forze acceleratrici abbracciano geometricamente la proporzione delle lontananze dal punto medio della vibrazione, e lo stesso fisicamente adiviene qual volta

volte maggiore e siano assai grandi. Nel primo caso gli spazi si calano infinitamente poco, ed il decremento loro geometricamente trascurasi: nel secondo caso calano molto poco, ed il loro scemamento si può trascurare fisicamente. Non altrimenti nelle corde sonore essendo quantunque ad ottenere un matematico isocronismo le vibrazioni maggiori, e minori abbiano ad essere infinitesime, nulladimeno esso isocronismo fisicamente persevera anche nelle minime oscillazioni. Ella è massima incontrastabile, che passando dalla Geometria alla Fisica, alle quantità rispettivamente piccole le minime ponno sempre mai corrispondere.

XII. Se mi venisse obbiettato supporsi da me, e non provarsi, che o si vibrino successivamente le particole aeree per eguali, o per ineguali spazi, il suono si diffonda alla medesima lontananza nel tempo di una oscillazione del corpo sonoro; soggiungerei che questo è un fatto, e non un'ipotesi. E per evitare scorrendo il suono un determinato spazio nel tempo di una vibrazione del corpo sonoro, m'astengo pertanto a cercare se movendosi le particelle dell'aria una dopo dell'altra o per eguali, o per ineguali spazi colla legge di un pendolo a cicloide, né soltanto forza proporzionale alla distanza dal punto medio dell'oscillazione, e trovando ciò avverarsi soltanto nella prima circostanza, ho conchiuso che le particole aeree per eguali spazi fanno le loro successive vibrazioni unisone a quelle del corpo sonoro.

Per togliere nulladimeno questo scrupolo, benché inconsistente, d'incontro ciò vorrei stabilire che nel tempo di una vibrazione del corpo sonoro il suono si propaghi alla stessa distanza, o si vibrino le particole aeree per eguali spazi, o pure si finga che questi spazi siano ineguali.

Ritenute le altre denominazioni, (fig. 30 e 31) pongo $ab = \frac{1}{2} L'$, $ag = x'$, $m' = lg = dx'$, e la massa del filo aereo, la cui lunghezza $L'$, $= m'$. Avremo $GQ : gq :: GH : gh$

ovvero $c : s :: Q : q$

e per conseguenza $Q = \frac{cq}{s}$, quando sia $AB : ab :: AG : ag$,

$L : L' :: x : x'$

dalla quale analogia ne nasce l'equazione $x = \frac{Lx'}{L'}$.

Nella formola $x = \frac{L}{nb} \int \frac{c\,dQ}{\sqrt{ncQ - Q^2}}$ somministratami dalla Dissertazione I. sostituisco in cambio di $x$, $Q$, $dQ$ i convenienti valori, e scopro $x' = \frac{L'c}{nb} \int \frac{-s\,dq + q\,ds}{s\sqrt{nsq - q^2}}$ (15)

Lo stesso discorso posto in uso nella Dimostrazione I.
mi guida a rinvenire la forza acceleratrice della
~~punto~~ fibra $lg = \frac{L'P\,ddy}{m'dx'dx'}$. (col mezzo della formola (15))
si faccia svanire prima $ddy$, ed indi $dy$, conforme
~~ho~~ mi sono adoperato al numero IV, e ci si presenterà
la detta forza $\frac{L'P\,ddy}{m'dx'dx'} = \frac{4Pb^2 \cdot \overline{s-y}}{L'm'c^2} - \frac{4Pb\,ds\,\sqrt{2sy-y^2}}{m'cs\,dx'} + \frac{L'Py\,dds}{m's\,dx'dx'}$.
~~Nella supposizione che tutte le particole si vibrino per~~
~~lo spazio c ho trovata la~~ forza, la quale nel mezzo
b dove $y=0$ si uguaglia a $\frac{4Pb^2s}{L'm'c^2}$. Nella sup=
posizione che tutte le particole aeree si vibrino per
lo spazio c ho trovata la forza acceleratrice $=$
$\frac{4Pb^2 \cdot \overline{c-R}}{Lmc^2}$, e quella nel punto B pareggia la
quantità $\frac{4Pb^2c}{Lmc^2}$. Ora vibrandosi in tempi eguali
~~vibrino~~ i punti b, B, le forze acceleratrici dov=
ranno essere proporzionali alle distanze $bc = s$
$BC = c$ dal punto medio c, C delle oscillazioni;
e perciò $\frac{4Pb^2}{L'm'c^2} = \frac{4Pb^2}{Lmc^2}$, e conseguentemente
$L'm' = Lm$: ma chiamata g la densità dell'
aria, $m' = L'g$, $m = Lg$; dunque $L'L'g = LLg$,
e finalmente $L' = L$, come si dovea dimostrare.

Schediasma VIII.

~~Della propagazione delle particelle sonore nell'aria.~~

Compiuta l'anno 1165

Dissertazione terza.

Della propagazione del suono per settori sferici.

I. Mi propongo in questa terza Dissertazione di esaminare se l'aria possa vibrarsi colla legge dei pendoli a cicloide nella supposizione che il suono per settori sferici si propaghi. Se il suono si diffonda per raggi, le particole d'aria situate fra due raggi stessi non hanno moto: ma posto che si propaghi per settori sferici, le oscillazioni si comunica da uno strato all'altro del settore, nè in qualunque strato c'è particola alcuna, che non si vibri. Nella prima supposizione per opera di una vibrazione del corpo sonoro si muove in ogni istante una data massa; imperciocchè se nel fine dell'onda una particola d'aria comincia ad oscillare, nel principio dell'onda un'eguale particola si pone in quiete. Non così succede nella seconda supposizione, diventando sempre maggiore la massa che si vibra, secondochè l'onda si va più allontanando dal centro sonoro; perchè lo strato ultimo, che principia a vibrarsi, è più grande del primo, in cui cessa l'oscillazione: e solamente l'onda contiene una massa costante, quando è dal detto centro infinitamente rimota.

Problema I.

<u>Determinare la curva, in cui qualsivoglia ordinata si eguagli allo spazio passato da un determinato strato dell'onda aerea nell'istante che il primo strato compiuta una intera vibrazione ha scorso uno spazio dato.</u>

II. Sia vbaf (fig. 32) il settore sferico (la cui base baf suppongo minima e quadrata) per il quale si diffonde il suono, e sia di più v il principio, e b la metà dell'onda. Tagliato il detto settore con due sezioni a i, bcd parallele a baf, che passino pei punti z, x dato, e z scelto ad arbitrio, si cerca

(fig. 31. 32)

Schediasma VIII.

(fig. 31 e 32 ~~[illegible]~~) lo spazio gh passato dalle particole aeree contenute nella sezione gro nello istante, in cui le particole avrà compiuta una mezza vibrazione hanno scorso lo spazio ad, e ciò nella ipotesi che la curva dac determini lo spazio ga, per cui facendo la metà di una oscillazione viaggiano le particole gro. Alla soluzione del presente Problema ci guida lo stesso discorso usato nel ~~Problema~~ Dimostr. III della seconda Dimostrazione, e quindi nominate come nel luogo citato $ad = c$, $ab = \frac{1}{2}L$, $ag = x$, $ga = s$, $gh = q$, scopriremo $x = \frac{Lc}{2b}\int\frac{-s\,dq + q\,ds}{s\sqrt{2sq - q^2}}$ (1).

~~Problema~~

Determinare la forza acceleratrice delle particole d'aria contenute nella sezione qualunque gro (fig. 31 e 32 ~~[illegible]~~) dopo che hanno camminato per lo spazio $gh = q$, e manca loro da passare lo spazio $he = s - q$.

III. Segno $gi = lm = dx$, e tirate nella fig. 31 le ordinate lo, mq, delineo hn, op parallele ad ab, che tagliano $no = dq$, $pq = dq + ddq$. Nella fig. 32 poi per i punti f, m faccio passare le sezioni las, mau parallele alla base. Stabilita va = a, ara = $\frac{a}{N}$, e conseguentemente la sezione quadrata $ari = \frac{a^2}{Na}$, scopriremo le sezioni $grs = \frac{\overline{a+x}^2}{N^2}$, $lat = \frac{\overline{a+x-dx}^2}{N^2}$, Secondo

~~[illegible] Dimostrazioni~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible] $N^2$ [illegible] $N^2$ [illegible] $e^2$~~

~~[illegible]~~

abbiamo

mrn =

$mru = \frac{\overline{a+x-2dx}^2}{N^2}$. Essendo lo strato $lrs = grs \cdot gl$, se ne determina facilmente il valore, onde si avrebbe

$$lrs = \frac{\overline{a+x}^2 \cdot dx}{N^2}.$$

Per una simile ragione ci si presenterà

$$mrt = \frac{\overline{a+x-dx}^2 \cdot dx}{N^2}.$$

Ora egli è di uopo supporre (fig. 31 e 32.) che i punti g, l, m, e con essi anche le sezioni grs, lrt, mru si sieno mossi da a verso b per gli spazj $gh = q$, $lo = q+dq$, $mq = q+2dq+ddq$. Acciocchè non ci resti del vano fra il nostro settore e i contigui, bisogna che quando le sezioni grs, lrt, mru hanno viaggiato per gli spazj $q$, $q+dq$, $q+2dq+ddq$, sieno cresciute quanto richiede il settore medesimo; di modo che sieno divenute uguali alle tre superficie

$$\frac{\overline{a+x+q}^2}{N^2},\ \frac{\overline{a+x-dx+q+dq}^2}{N^2},\ \frac{\overline{a+x-2dx+q+2dq+ddq}^2}{N^2}.$$

In questo stesso incontro si scopre $gl = dx-dq$, $lm = dx-dq-ddq$. Troveremo adunque, allora che sia seguito il nominato movimento $lrs = \frac{\overline{a+x+q}^2 \cdot \overline{dx-dq}}{N^2}$, $mrt$

$$= \frac{\overline{a+x+q-dx+dq}^2 \cdot \overline{dx-dq-ddq}}{N^2}.$$

Le elasticità degli strati lrs, mrt avanti di moversi, e dopo di aver fatto moto stanno inversamente come i loro volumi nella prima, e nella seconda circostanza. Equilibrandosi la forza elastica dei nominati strati, mentre sono in quiete, col peso della

atmosfera

atmosfera, ~~da~~ con una colonna di mercurio, la cui altezza moltiplicata nella densità dello stesso si uguagli a $P$, si faccia

~~[illegible]~~,

$$\overline{a+x+q}^2 \cdot \overline{dx-dq} : \overline{a+x}^2 \cdot dx :: P : \frac{P \cdot \overline{a+x}^2 \cdot dx}{\overline{a+x+q}^2 \cdot \overline{dx-dq}},$$

$$\overline{a+x+q-dx+dq}^2 \cdot \overline{dx-dq-ddq} : \overline{a+x-dx}^2 \cdot dx ::$$

$$P : \frac{P \cdot \overline{a+x-dx}^2 \cdot dx}{\overline{a+x+q-dx+dq}^2 \cdot \overline{dx-dq-ddq}},$$ e gli ultimi termini dalle analogie dinoteranno le altezze del mercurio moltiplicate nella densità di esso corpo, che fanno equilibrio colla elasticità degli strati lns, mat, posciachè le sezioni grs, lnt, nmu hanno scorso gli spazj $gh = q$, $lo = q + dq$, $mq = q + 2dq + ddq$.

La sezione lnt, che separa i due strati lns, mat, è stimolata da l verso b dalla differenza della risultante quantità moltiplicata nella detta sezione. Prendendo la indicata differenza, sarà

$$\text{essa} = \frac{P \cdot \overline{a+x-dx}^2 \cdot dx}{\overline{a+x+q-dx-dq}^2 \cdot \overline{dx-dq-ddq}} - \frac{P \cdot \overline{a+x}^2 \cdot dx}{\overline{a+x+q}^2 \cdot \overline{dx-dq}}$$

$$= \frac{P \cdot \overline{a+x-dx}^2 \cdot \overline{a+x+q}^2 \cdot \overline{dx-dq} - \&c}{\overline{a+x}^2 \cdot dx}$$

$$= \frac{p x \, \overline{a+x-dx+a+x+y}^2 \cdot dx+dy - p x \, \overline{a+x}^2 \cdot \overline{a+x+y+dx+dy}^2 \cdot dx - dy - ddy}{\overline{a+x}^4 \cdot dx},$$

ed adempiuti i necessarj calcoli, trascurando le grandezze relativamente nulle, la determineremo

$$= \frac{p\,ddy}{dx^2} - \frac{2p\,dy}{a+x} - \frac{2p\,y\,dx}{\overline{a+x}^2}.$$

Tolta infine la distanza $ra = a$ del centro sonoro dal principio dell'onda, svaniscono i due ultimi termini, e resta come nelle Dissertazioni la grandezza, che s'agguaglia alla forza sollecitante l'elemento $dx$ del raggio sonoro fornito di grossezza costante, conforme ho determinato nelle Dissertazioni prima e seconda $= \frac{p\,ddy}{dx^2}$. In fatti nella medesima ipotesi il suono si propaga per linee adequatamente parallele, e contenendo l'onda intera una massa costante, egli è lo stesso come se il moto tremante sonoro si diffondesse per raggi.

~~[illegible]~~

Dalle cose pur segnate raccogliesi, che lo strato $las$ verrà sollecitato dalla forza $= \left( \frac{p\,ddy}{dx^2} - \frac{2p\,dy}{a+x} - \frac{2p\,y\,dx}{\overline{a+x}^2} \right) \cdot \frac{\overline{a+x}^2}{N^2}$.

IV. Per passare dalla forza sollecitante alla accelerante, egli è d'uopo dividere la prima per la massa dello strato $las$ da essa posta in moto. Alla lunghezza $L$ dell'onda intera corrisponde quella del settore $= a+L$, la base dello stesso $= \frac{\overline{a+L}^2}{N^2}$, ed il suo volume $= \frac{\overline{a+L}^3}{3N^2}$. Sottratto da questo il volume

vari

$\ldots$ $va\,ai = \dfrac{a^3}{3N^2}$, sarà il volume dell'onda

$= \dfrac{3a^2L + 3aL^2 + L^3}{3N^2}$. Il volume dello strato

$lrs$ si adegua ad $\dfrac{\overline{a+x}^2 \cdot dx}{N^2}$. Si chiami

$M$ la massa dell'onda, e la seguente analogia

$\dfrac{3a^2L + 3aL^2 + L^3}{3} : \overline{a+x}^2 \cdot dx :: M : \dfrac{\overline{a+x}^2 \, 3M\,dx}{3a^2L + 3aL^2 + L^3}$

ci somministrerà il valore della massa contenuta nello strato menomo $lrs$. Dividasi adunque la forza sollecitante sopra scoperta per questa massa, e ci si presenterà la cercata forza acceleratrice

$$\frac{3a^2L + 3aL^2 + L^3}{3MN^2} \cdot \frac{P\,ddq}{dx^2} - \frac{2P\,dq}{\overline{a+x} \cdot dx} - \frac{2Pq}{\overline{a+x}^2} \quad (2)$$

Avverto che fingendo $va = a = \infty$, cancellati i termini incomparabili, la formola si riduce così $\dfrac{a^2LP\,ddq}{N^2M\,dx^2}$, che a prima vista non si accorda con quella dello $\dfrac{LP\,ddq}{m\,dx^2}$ delle due prime Dissertazioni. Si rifletta pertanto che quivi ho espressa la massa $m$ per la lunghezza $L$ dell'onda moltiplicata per la densità $g$ dell'aria, onde si abbia $m = Lg$. Ma nella presente Dissertazione il giro del raziocinio richiede $M = \dfrac{3a^2L + 3aL^2 + L^3}{3N^2} \cdot g$, e supponendo $a = \infty$,

$M = \dfrac{a^2Lg}{N^2}$. Dunque, nella detta ipotesi, scriveremo $M = \dfrac{m \cdot a^2}{N^2}$ (3)

Sostituito questo valore in cambio di $M$ nella formola $\dfrac{a^2LP\,ddq}{N^2M\,dx^2}$, ne risulterà come nelle citate Dissertazioni la forza acceleratrice $=$

$\dfrac{LP\,ddq}{m\,dx^2}$.

Dalla formola (1) ho dedotto nella seconda Dissertazione

il

il valore di* $dq = \frac{q\,ds'}{s'} - \frac{2b\,dx}{Lc}\sqrt{2s'q - q^2}$, di

[illegible]

$$ddq = \frac{4b^2dx^2}{L^2c^2}\cdot\overline{s'-q} - \frac{[illegible]}{Lc\sqrt{2s'q-q^2}} - \frac{2bq^2\,dx\,ds'}{[illegible]\sqrt{2s'q-q^2}} + \frac{q\,dds'}{s'} - \frac{4b\,dx\,ds'\sqrt{2s'q-q^2} + q\,dds'}{Lcs'}\ \frac{}{s'}$$

Fatta la sostituzione di questi valori nella equazione (2) e trovo la forza acceleratrice nel sito g =

$$\frac{3a^2LP + 3aL^2P + L^3P}{3MN^2}\cdot\frac{4b^2\cdot\overline{s'-q}}{L^2c^2} - \frac{4bq\,ds'}{Lc\,dx\sqrt{2s'q-q^2}} + \frac{4bq^2ds'}{Lcs'dx\sqrt{2s'q-q^2}} - \frac{4b\,ds'\sqrt{2s'q-q^2}}{Lcs'dx} + \frac{q\,dds'}{s'dx^2}$$

$$-\frac{2q\,ds'}{\overline{a+x}\cdot s'dx} + \frac{4b\sqrt{2s'q-q^2}}{Lc\cdot\overline{a+x}} - \frac{2q}{\overline{a+x}^2}\ (A)$$

V. C. qui fa di mestieri determinare la relazione fra s' ed x. Sembrami evidente, che comunicandosi il tremito sonoro da strato a strato, da onda ad onda, e poiché l'aria è un fluido elastico, nulla perdendosi in conseguenza, due strati diversi, dopo che hanno compiuta la metà di una vibrazione, siano forniti di pari forze vive. Così allora che l'onda si sia infinitamente allontanata dal centro sonoro, onde $va = a = \infty$, e conservando ancora la sua massa costante, segua lo stesso effetto, come se il suono si fosse propagato per raggi, accadrà che le particole contenute in diverse sezioni ari, grs' percorrano spazj uguali; condizione, come ho dimostrato, necessaria in tale circostanza, acciocché possa l'aria oscillare colla legge di un pendolo a cicloide.

Segno $ak = dx$, e pel punto k faccio passare la sezione kry parallela all'asse. Le masse dei due strati ary, krs' serbano la ragione dei volumi loro volumi prima che

succeda

succeda alcun moto, cioè a dire: dico $\frac{a^2 dx}{N^2} : \frac{\overline{a+x}^2 dx}{N^2}$. Facendo i detti moti una semi-vibrazione sicrona, quello lo spazio $ad = c$, a quello lo spazio $gk = s'$, e proporzionali ad essi spazj sono le velocità acquistate nel punto della metà della oscillazione: ma per le cose dette devono eguagliarsi le loro forze vive; dunque ridotto il calcolo troveremo $a^2c^2 = \overline{a+x}^2 \cdot s'^2$, e per conseguenza $\frac{ac}{s'} = a+x$ (♣). Prendo le prime, ed indi le seconde differenze posta $dx$ costante, e mi si presenta $-\frac{acds'}{s'^2} = dx$, $dds' = \frac{2ds'^2}{s'}$.

Sostituisco nella equazione (4) in cambio di $a+x$, di $dx$, e di $dds'$ tali scoperti valori, ed ho espressa con quantità finite la forza accelerante nel sito ξ, effettuate le necessarie operazioni, $=$

$$\frac{3\hat{e}^2LP + 3aL^2P + L^3P}{3MN^2} \cdot \frac{4b^2 \cdot \overline{s'-q}}{L^2c^2} + \frac{16bqs'^2 - 4bq^2s'}{L^2c^2\sqrt{2s'q - q^2}} \overline{+\frac{4bs'\sqrt{2s'q-q^2}}{L^2c^2}} + \frac{2qs'^2}{c^2a^2}$$

quando si ammetta l'ipotesi, che il suono per settori sferici si propaghi; il che ⊕.

Corollario.

VI. Non può sussistere negli strati componenti le onde il moto vibratorio, che abbiamo supposto colle leggi di un pendolo cicloide; perchè le forze acceleratrici non seguono la ragione delle distanze $s'-q$ dal punto medio della vibrazione. +

Corollario.

Deriva, mi sia lecito di ripeterlo, che contro giustizia il Cavalier Newton viene incolpato di petizion di principio, quando tratta delle vibrazioni dell'aria nella diffusione del suono. Se il suo progresso fosse vizioso, si dovrebbero trovare le forze acceleranti proporzionali alle lontananze della metà della oscillazione anche nell'ipotesi, che il suono per settori sferici si propaghi: ma in tale incontro le

+ Ed in fatti dal numero X. della Dissertazione II. raccogliesi $x = \frac{L}{2b}$ Arco Raggio c seno $c \cdot \frac{\overline{s'-q}}{s'}$, e dalla formula (5) $x = \frac{ac}{s'} - a = \frac{a \cdot \overline{c-s'}}{s'}$; dunque $\frac{L}{2b}$ Arco Raggio c Seno $c \cdot \frac{\overline{s'-q}}{s'} = \frac{a \cdot \overline{c-s'}}{s'}$; equazione totalmente diversa da quella, che risulterebbe dal porre $\frac{4bs'\sqrt{2s'q-q^2}}{L^2c^2} + \frac{2qs'^2}{c^2a^2}$ uguale a nulla, ovvero proporzionale ad $s'-q$, acciocchè le forze acceleratrici si corrispondessero nella ragione che l'ipotesi assunta richiede l'oscillazione supposta.

la forza acceleratrice non abbraccia la detta legge; dunque il Sig.r Newton non pecca di petizione di principio.

Corollario.

Pongasi infinita la distanza $va = e$ delle onde dal centro sonoro, e cancellati i termini incomparabili, riverranno la forza acceleratrice della strato $las = \frac{Aa^2 Pb^2 . s - q}{MN^2 L c^2}$; e conciossiachè nella supposizione di $e = \infty$ abbiasi per la formola (3) $M = \frac{me^2}{N^2}$, ovvero $MN^2 = me^2$, e per la formola (5) $s = c$; surrogati questi valori, ci si presenterà la mentovata forza $= \frac{A Pb^2 . c - q}{m L c^2}$ come nella prima Dissertazione; mantenendosi in tal caso adequatamente costante la massa delle onde, e comunicandosi il moto non altrimenti che per raggi sonori.

Scolio.

III. Dalle cose dette *Dai premessi discorsi* fluisce una importantissima avvertenza, ed è che quando si dica, che il suono si diffonda sfericamente all'intorno del corpo sonoro, la proposizione è soggetta ad equivoco, ed abbisogna di spiegazione. Posto che si intenda propagarsi il suono per infiniti settori sferici, l'asserzione è falsa; perchè ammessa una si fatta dilatazione, le forze acceleratrici non sarebbero la ragione della distanze dal punto medio della vibrazione, e le particole aeree non potrebbero oscillare a guisa di un pendolo a cicloide: ciò che ripugna ai fenomeni. Che se si afferma propagarsi il suono per tanti raggi, o linee aeree, che partono dal centro sonoro per tutte le direzioni, la proposizione è vera, e tutte le conseguenze che indi si deducono vanno perfettamente di accordo colla esperienza.

Questi

## Schediasma VIII.

Questi raggi sonori sono talmente spessi, che in quel sito, dove il suono giunge a farsi sentire, non c'è minimo spazio, che non ne contenga moltissimi. Il loro numero per altro atto a colpire una data superficie decresce in ragione reciproca duplicata delle distanze dal centro sonoro, e perciò finalmente si giunge a tali lontananze, che entrando pochissimi raggi nell'orecchio, non cagionano in esso impressione sensibile. Si aggiunga che il moto loro ha, benché lentamente, da calare, e finalmente da estinguersi, conforme ho notato nel numero XI. della seconda Dissertazione; e quindi il vigore del suono scema in una proporzione alquanto maggiore della inversa dei quadrati delle distanze. Le verità spiegate intorno al suono si adattano interamente alla luce, perché, siccome io giudico, dalla vibrazione del corpo lucido venga prodotta.

230

Schediasma VIII. Della propagazione dei tremori sonori nell'aria.

Dissertazione quarta.

Esame della formola del Sig.r Leonardo Eulero abbracciata nella Dissertazione sopra la natura del fuoco, la quale determina la velocità della propagazione del suono nell'aria.

1. Il celebratissimo Signor Leonardo Eulero nella Dissertazione sopra la natura del fuoco determina la velocità del suono con una formola, che discorda dalla Newtoniana, a cui parimente dei miei raziocinj sono stato guidato. Introducendo nella formola del Signor Eulero la densità dell'aria mista colle particole eterogenee, che si raccoglie dalle osservazioni, ci dà essa la velocità del suono maggiore della vera; imperciocchè dovrebbe viaggiare piedi Parigini 1108 in un minuto secondo, nel quale effettivamente non ne scorre salvo che 1038. Ora se la velocità riesce soverchia, quantunque la densità dell'aria si supponga più grande del giusto, che succederebbe poi, se si mettesse a computo la densità molto minore dell'aria pura, la quale sola, conforme ha notato il Cavaliere Newton, è atta a ricevere, ed a tramandare le vibrazioni sonore. Benchè questa sola avvertenza faccia toccar con mano la falsità della formola del Signor Eulero, nulladimeno ho presa risoluzione di farne un diligente esame, e se pure non prendo errore, mi è riuscito di dedurre dalla stessa un fisico assurdo, che al giudicio di chi legga sottopongo prontamente.

Roddhamsed.

II.

Dissertazione IV.

Esame della formola dal Sig. Eulero abbracciata nella Dissertazione sopra la natura del fuoco, e dal Sig. [illegible] nella Proposizione quinta del libro terzo del primo tomo de suoi Elementi di Fisico-Matematica, la quale determina la velocità della propagazione del suono.

Finito li 18 7bre 1755.

Problema

Chiamato P il peso della atmosfera, dx la minima costante lunghezza di una particola aerea, y la distanza dal punto medio della vibrazione, ed L la lunghezza, a cui si propaga il suono, mentre il corpo sonoro fa una vibrazione; e posto che la forza sollecitante la particola dx, quando le resta da scorrere lo spazio u, per giungere alla metà della vibrazione, si eguagli a $\frac{16Py\,dx}{L^2}$, si dimanda la velocità, colla quale si propaga il suono, o sia lo spazio da esso scorso in un tempo dato.

II. Sia m la massa della linea aerea L, ed istituita l'analogia $L : m :: dx : \frac{m\,dx}{L}$, si troverà questa il valore $\frac{m\,dx}{L}$ della massa della particola dx. Divisa la forza sollecitante $\frac{16Py\,dx}{L^2}$ per la massa $\frac{m\,dx}{L}$ della nominata particola, ne risulta la forza acceleratrice $\frac{16Py}{Lm}$. Si chiami u la velocità della fibra dx, e per le note formole avremo

$\frac{16P}{Lm}\cdot -y\,dy = u\,du$, ed integrando

$\frac{16P}{Lm}\cdot \overline{c^2-y^2} = u^2$. Aggiungo la costante

Schediasma VIII.

costante è quadrato di quello spazio e che trova la particola $dx$ facendo una semivibrazione così nel principio della vibrazione stessa quando $y = c$, si trova, come è dovere, $u = 0$. Estraendo la radice, e riflettendo essere $u = -\frac{dy}{dt}$ ($t$ essendo il tempo, in cui si passa lo spazio $c - y$) e si permetterà

$$4\sqrt{\frac{p}{Lm}}\cdot\sqrt{c^2-y^2} = u = -\frac{dy}{dt},$$ e conseguentemente

$$4\sqrt{\frac{p}{Lm}}\cdot dt = -\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}},$$ ed

integrando, $$4\sqrt{\frac{p}{Lm}}\cdot t = \int\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}}.$$ Non si aggiunge costante, perchè nella tale addizione ritrovasi $t=0$ quando $y=c$. Si denomini $b$ il quadrante del raggio $c$ ed allora che ~~quando~~, dopo compiuta una vibrazione, lo spazio passato s'eguaglia a $2c$, ed $y = -c$; avremo $\int\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}} = \frac{2b}{c}$. Quindi sarà $4\sqrt{\frac{p}{Lm}}\cdot t = \frac{2b}{c}$, e perciò

$$t = \frac{2b}{c}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{Lm}{p}}.$$

Sia $h$ la lunghezza di un pendolo a secondi il tempo di una vibrazione del quale si esprime per $\frac{2b}{c}\sqrt{h}$. Se ~~[illegible]~~ vorremo esprimere per secondi il tempo $t$, in cui la particola $dx$ fa una vibrazione, o il moto si propaga alla distanza $L$, otterremo l'intento col ~~per~~ mezzo della seguente analogia $1 : \frac{2b}{c}\sqrt{h} :: t : \frac{2b}{c}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{Lm}{p}}$ da cui si deduce $t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{Lm}{ph}}$. Nomineremo ~~a~~ $a$ l'altezza a cui si sostenta il mercurio nel barometro, $G$ la sua gravità specifica, $g$ la gravità specifica dell'aria, e ne avremo $p = aG$, $m = Lg$. Avremo, per tanto $t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{L^2g}{aGh}}$, e conseg.te $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{aGh}{g}}$, formola adottata.

adottata dal Sig.r Eulero, ~~[illegible]~~ Dissertazione IV., che determina n. 39
la velocità $\frac{L}{t}$ con cui si propaga il suono, ossia
lo spazio $L$ ch'esso scorre nel tempo dato $t$ espresso in secondi.

## ~~Problema II~~

II. Il primo punto A (fig. 33) della linea sonora AB facendo una mezza oscillazione per la direzione AB scorre uno spazio eguale alla linea AD normale ad AB, ed intanto il vemito sonoro si è propagato da A sino in B. Nell' istante in cui il punto A giunge al termine del detto spazio un altro qualunque punto G abbia passato uno spazio eguale alla linea GH parallela ad AD. Si congiungano i punti D, H, ed altri egualmente determinati con una curva, che passerà per il punto B; perchè quando A ha compiuta una semivibrazione il punto B non si è ancor cominciato a movere. Si dimanda ~~[illegible]~~ la natura della curva DHB suppo-nendo data come nel numero II. l'espressione ~~che si è trovata~~ della forza sollecitante supposta ~~nel numero~~ II. della forza sollecitante il punto G. ~~[illegible]~~

III. Si chiami $AB = DC = \frac{1}{2}L$, $AD = BC$ ~~[illegible]~~ $= c$, $p$ il peso dell'atmosfera, e sia $= \frac{15\,P\,y\,dx}{L^2}$ la forza sollecitante il punto G.

$AG = DE = x$, $GH = y$, $HE = c - y = q$,

~~[illegible]~~

Ho dimostrato nel numero VII. della prima Dissertazione che qualunque siasi la curva DHB, il punto G viene sollecitato dalla forza $\frac{P\,ddq}{dx}$. Ci si presenterà dunque l'equazione

~~[illegible]~~

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Problema III.

[illegible]

[illegible]

Combinando [illegible] dunque, si ha per seconda l'equazione

$$\frac{p\,ddq}{dx} = \frac{16\,p\,y\,dx}{L^2},$$ da cui si deduce

$L^2\,ddq = 16\,y\,dx^2$. Essendo $c - q = y$, avremo $dq = -dy$, e $ddq = -ddy$. Fatta la surrogazione scriveremo $-L^2\,ddy = 16\,y\,dx^2$. Pongo $p\,dx = dy$, e differenziando, presa al solito per costante $dx$, $dp\,dx = ddy$, e sostituendo $-L^2\,dp\,dx = 16\,y\,dx^2$, o sia $-L^2\,dp = 16\,y\,dx$: [illegible]

$dx = \frac{dy}{p}$ ; dunque $-L^2 dp = \frac{16^2 y dy}{p}$

o vero $-L^2 p dp = 16^2 y dy$, ed inte=
grando $16^2 A^2 - L^2 p^2 = 16^2 y^2$, e dopo
fatte le debite operazioni, $4\sqrt{A^2-y^2} = Lp$.
~~In questo numero~~ Ora $p = \frac{dy}{dx}$, e però
$4\sqrt{A^2-y^2} = \frac{L dy}{dx}$, e conseguentemente

$\frac{4 dx}{L} = \frac{dy}{\sqrt{A^2-y^2}}$, e moltiplicando

per $A$, $\frac{4A dx}{L} = \frac{A dy}{\sqrt{A^2-y^2}}$. [illegible]

[illegible] integrazione sarà aggiungere costante,
che in questo caso va [illegible], e scoprirò $\int\frac{A dy}{\sqrt{A^2-y^2}}$, onde l'analogia $A : \frac{1}{4}L :: \int\frac{A dy}{\sqrt{A^2-y^2}} : x$.

$$\frac{Ax}{\frac{1}{4}L} = \int\frac{A dy}{\sqrt{A^2-y^2}}$$

Costruzione.

IV. Si determini il raggio $CR = A$, fornito di tal [illegible], che descritto il semicircolo
[illegible], e prolungata la linea AB sia
ZXRSV, e prolungata la linea [illegible] sia [illegible]
che lo tagli nel punto S, sia [illegible]
ZXRS doppio del raggio $CR = A$.
Segno [illegible] $CI = y$, e [illegible]
[illegible] IN parallela a CD,
punto [illegible] nostro semicircolo [illegible]
[illegible]. Cale è noto essere l'arco
[illegible]

$$ZT = \int\frac{A dy}{\sqrt{A^2-y^2}}. \quad \text{Facciasi}$$

$$CR : \tfrac{1}{4}DC :: ZT : DQ$$
$$A : \tfrac{1}{4}L :: \int\frac{A dy}{\sqrt{A^2-y^2}} : x.$$

e condotta QG perpendicolare [illegible] DC, e parallela a CR,
taglierà essa la linea IN nel punto H, il
quale apparterrà alla curva DHB
Quando $y = CR = DA = c$, ed $x$ competono
suo valore $DQ = AH$, $DC = AB$ determinasi
nelle

Dalle analogie

$$CR : \tfrac{1}{2}DC :: 2TX : DaC = AaH$$

$$CR : \tfrac{1}{2}DC :: 2TXRS : DC = AB$$

Questa ultima analogia dimostra, che retta-mente ho stabilito il valore della costante A=CR; imperocchè siccome DC è doppio di ½DC, così l'arco 2TXRS è doppio del raggio CR.

Presa una ascissa x maggiore di DaC, e minore di DC, si trova y maggiore di CB = DA = c, segno manifesto, che il pezzo di curva aH 3H B giace al di sotto della linea AB. Se si dividerà la linea aCC per metà nel punto 3C, corrisponderà ad esso la massima ordinata 3C 3H = y = CR = A.

VI. Ciò che questa discreta riflessione si è, che mentre il punto A facendo una mezza vibrazione ha scorso, per la direzione AB uno spazio eguale ad AD, un qualunque punto medio tra A e aH, per esempio G, avrebbe passato per la medesima direzione lo spazio GH; i due punti aH, B sarebbero rimasti in quiete, ed ogni punto, tra aH e B per esempio 3G, si sarebbe mosso con direzione contraria per uno spazio eguale a 3G3H. Ora non potendosi capire, come in virtù della vibrazione del punto A da A verso B, le particole medie tra aH e B possano acquistare un movimento contrario, questa considerazione apertamente dimostra che la formola $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{aGh}{g}}$ non è atta ad esprimere la velocità, con cui si propaga il suono.

AaH

AB

A.

u:

A=c

uto

ou:

Vx=

ario

ite

ro

ou

di

to

uti

ou

Schediasma VIII

~~Della propagazione dei tremiti sonori nell'aria.~~

## Dissertazione quinta.

<u>Esame della ipotesi proposta dal Dottissimo Sig.r D. Paolo Frisi, che sebbene tutte le particole di aria componenti l'onda nello stesso istante finiscono di muoversi, non cominciano però le loro vibrazioni nell'istante medesimo, di modo che successivamente si propaga il tremito da una all'altra.</u>

I. Avendo comunicata la precedente quarta Dissertazione al Dottissimo Sig.r D. Paolo Frisi, mi propose egli di ricercare, se si potesse salvare la formola dal Signor Eulero, supponendo che tutte le particole di aria componenti l'onda, avvegnaché nello stesso tempo finiscano di muoversi, non principino però nell'istante medesimo, di maniera che da una all'altra successivamente il tremito si propaghi. Or ecco ciò che è risultato dalle mie indagazioni.

Esaminando la formola de

Esame della ipotesi proposta Dissertazione V. dal Dottissimo Dre D. Paolo Frisi, che tutte le particelle di aria componenti il polso, benche' nello stesso tempo finiscan di muoversi, non cominciano però tutte nell' istante medesimo, e successivamente si propaga il moto da una all' altra.

Compiuta 20. 9bre. 1758.

Cominciando da formola dal Sig. Eulero ... abbracciata, colla quale determinava la velocità della propagazione del suono, ho ponato, che chiamato P il peso dell' atmosfera, y la distanza d'una particola di aria dal punto medio della vibrazione, L la lontananza, a cui si propaga il suono mentre il corpo sonoro fa una oscillazione, nella quale s' impieghi il tempo t, m la massa del polso, la cui lunghezza L, h la lunghezza di un pendolo a secondi, a l' altezza, a cui si sostenta nel Barometro il Mercurio, G la sua gravità specifica, e finalmente g la gravità specifica dell' aria, si verificherà la formola $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{aGh}{g}}$ colla quale il lodato Geometra esprimeva la velocità equabile con cui si diffonde il suono, quando le particole tutte, che lo compongono, vibransi isocrone, e per eguali spazj, siano stimolate dalla forza acceleratrice $\frac{16Py}{Lm}$.

La nuova ipotesi del Dre Frisi richiede la soluzione del seguente problema.

Problema

Posto che tutte le particelle d'aria componenti il polso comincino successivamente le loro oscillazioni, e le finiscano nello stesso istante, si cerca la forza acceleratrice di esse particole.

II. Ella è cosa notissima, che se le particole aeree si vibrano

# Schediasma VIII.

si vibrano per ineguali spazj in tempi eguali, le
forze acceleratrici serberebbero la ragione delle di-
stanze dai punti medj delle oscillazioni.
Ma se le mentovate particole oscillano per eguali spa-
zj in tempi ineguali, staranno le forze accelera-
trici inversamente come i quadrati dei tempi
stessi, mentre le particelle medesime si trovano
in pari lontananza dal punto di mezzo delle
loro vibrazioni. E vaglia il vero. Sia $c$ lo
spazio scorso dalle particole, quando compiono
la metà della vibrazione, $y$ la distanza dal
punto medio della oscillazione medesima,
$t$ il tempo in cui si passa lo spazio $c-y$, $ky$
la forza acceleratrice. Avverto che il coefficiente
$k$ è costante in riguardo d'una data particola,
e vario relativamente a particole diverse: e che
sotto due particole ad eguale lontananza $y$ dalla
metà della vibrazione, le loro forze acceleratrici
si corrispondono nella ragione dei coefficienti $k$.
Dalle formole delle forze continuamente appli-
cate si deduce $\int \frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}} = t\sqrt{k}$: ma se
due particole egualmente distano dal punto
medio della oscillazione la $\int \frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ ha sola-
mente ed invariabile lo stesso valore. Dun-
que ciò si verifica parimente della quantità $t\sqrt{k}$,
e sia del suo quadrato $t^2k$. Quindi nelle
suddette circostanze sarà $k$ come $\frac{1}{t^2}$, cioè i
diversi coefficienti $k$ serberanno la ragione in-
versa duplicata dei tempi $t$ impiegati a scor-
rere gli spazj eguali $c-y$. Tali tempi
si corrispondono altresì a quelli, che si spendono
nelle intere vibrazioni quando $c-y=2c$, e
per conseguenza i coefficienti $k$ stanno inversamente
come i quadrati dei tempi delle oscillazioni.
Ma conforme ho avvertito di sopra in pari distanza
$y$ dal punto medio della vibrazione le forze acceleratrici
si corrispondono nella proporzione dei coefficienti $k$.
Dunque in si fatti incontri le dette forze abbracciano
la ragione reciproca duplicata dei tempi delle
oscillazioni

~~oscillazioni~~ : il dec. G

Dai due principj canonici si ricava il loro adattato al caso, che le particole aeree si vibrino per inuguali spazj in tempi ineguali. ~~[illegible]~~ Le loro acceleratrici si riferiscono nella ragione composta $\frac{y}{2a}$ diretta delle distanze y dalle metà delle vibrazioni, ed inversa ~~duplicata~~ dei tempi ~~[illegible]~~ 2 nelle oscillazioni impiegati.

III. Sia AB (Fig. 3a) la lunghezza dell'~~polso~~ onda, cioè a dire si propaghi il suono per lo spazio AB mentre il primo punto A del polso fa una vibrazione, e se il suono si ha da diffondere colla velocità $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{aGh}{S}}$ ~~[illegible]~~ Newtoniani, egli è necessario ~~che~~ nelle ipotesi dal lodato Padre Frisi propostami ~~[illegible]~~ camminare che la prima particola di aria A sia animata dalla stessa forza acceleratrice $\frac{15Py}{2m}$, che l'animerebbe, se tutte le altre particole dell'onda AB si movessero insieme, e per eguali spazj. Così in ambe le supposizioni il primo punto A vibrasi in par tempo, e conseguentemente in pari tempo il suono scorre lo spazio AB = L. * Se il punto B principia a muoversi dopo il punto A per un tempo proporzionale alla distanza AB (perchè il suono viaggia equabilmente) il punto G a cui trova contemporaneamente alla sua vibrazione passato il tempo parimente proporzionale alla lontananza AG: Ma giusta la supposizione della massa in campo dei due Frisi i punti A e G terminano le loro oscillazioni nello stesso istante, ed il punto A ~~da~~ una oscillazione vi spende il tempo proporzionale ad AB. Dunque il tempo consumato dal ~~[illegible]~~ nella vibrazione si scoprirà proporzionale a GB. * Compiuta una oscillazione abbia il punto A scorso per la direzione AB

* a capo

* a capo

## Schediasma VIII.

AB lo spazio $AD = 2c$, ed il punto G lo spazio $GH = 2y$, e ~~supponendo~~ $AG = x$, e conseguentemente $GB = L - x$, il minore tutto si sommeranno la ~~sottoposta~~ seguente analogia.

$$\frac{c}{L^2} : \frac{y}{L^2 - 2Lx + x^2} :: -\frac{16 P c}{Lm} : -\frac{16 P L y}{m \cdot L^2 - 2Lx + x^2}$$

la quale ci insegna, che ~~[illegible]~~ in tale circostanza la forza acceleratrice del punto $A = -\frac{16 P c}{Lm}$, quella del punto qualunque G posto ad arbitrio si uguaglia a $-\frac{16 P L y}{m \cdot L^2 - 2Lx + x^2}$: il che &

Ho anteposto alle dette forze il segno negativo, perchè queste spingono per la direzione BA contraria alla AB, per la quale si suppone, che i punti A, G abbiano fatta una loro vibrazione.

**~~Problema II~~.**

<u>Determinare, ed indi maneggiare l'equazione della curva DHB (fig. 7), le cui ordinate AD, GH si uguaglino agli spazj scorsi dalle particelle d'aria A, G, quando hanno compiuta una oscillazione.</u>

IV. ~~Dalla~~ ~~[illegible]~~ Dal num.º VII della ~~[illegible]~~ Osservazione I. raccogliesi ~~Schediasma~~ ~~[illegible]~~ ho fatto vedere, che qualunque sia la natura della curva DHB la particola di aria G è stimolata dalla forza sollecitante $= \frac{2 P ddy}{dx}$. Si divida questa per la massa della menzionata particola, la cui lunghezza $= dx$ la qual massa si trova eguale a $\frac{m dx}{L}$ e ne risulterà la forza acceleratrice $= \frac{2 P L ddy}{m dx^2}$; ma una tal forza nell' antecedente Problema I. ho scoperta $= -\frac{16 P L y}{L^2 - 2Lx + x^2}$

Dunque siamo pervenuti alla equazione

$$-\frac{16 P L y}{m \cdot L^2 - 2Lx + x^2} = \frac{2 P L ddy}{m \cdot dx^2}$$, e dividendo per $\frac{2 P L}{m}$

$\frac{aLL}{m}$, e cangiando i segni, $\frac{4y}{L^2-2Lx+x^2} = -\frac{ddy}{dx^2}$,

e per conseguenza $\frac{4dx^2}{L^2-2Lx+x^2} = -\frac{ddy}{y}$ (1)

Faccio $L-x = v$ (2), da cui differenziando ne nasce $-dx = dv$, e surrogati questi valori nella equazione (1) trovo $\frac{4dv^2}{v^2} = -\frac{ddy}{y}$ (3)

Pongasi $\frac{dv}{v} = dq$ (4), ed adempiuta la sostituzione si avrà $4dq^2 = -\frac{ddy}{y}$ (5).

V. Affinchè si faccia passaggio dalle seconde alle prime differenze, stabilisco $-dy = z\,dq$ (6), e differenziando $-ddy = z\,ddq + dz\,dq$ (7).

Supponendosi costante $dx$, sarà parimente tale $dv = -dx$. Giacchè $\frac{dv}{v} = dq$, prese le differenze, ed essendo $dv$ costante, avremo $-\frac{dv^2}{v^2} = ddq$; ma ~~la formola (4) $\frac{dv}{v} = dq$ ci insegna essere~~ $\frac{dv^2}{v^2} = dq^2$; dunque $ddq = -dq^2$. Sostituisco questo valore nella equazione (7), e scoperto $-ddy = -z\,dq^2 + dz\,dq$, faccio uso di tale grandezza nella formola (5), e mi si presenta $4dq^2 = \frac{-z\,dq^2 + dz\,dq}{y}$.

Finalmente pongo in vece di $dq$ il suo valore $-\frac{dy}{z}$ suggeritomi dalla equazione (6), ed effettuati i dovuti calcoli scopro $-4y\,dy = z\,dy + z\,dz$ (8), espressione la quale non contiene, che le sole prime differenze.

VI. Si separano in essa le variabili col metodo del Sig.r Gabbriello Manfredi, facendo $z = yu$ (9), onde

onde dopo le convenienti operazioni si trovi

$$\frac{p\,dp}{p^2+p+8} = -\frac{dy}{y},\ \text{ovvero}\ \frac{p\,dp}{\overline{p+\frac{1}{2}}^2+\frac{31}{4}} = -\frac{dy}{y}\ (10)$$

Sia $p+\frac{1}{2} = s$ (11), e per conseguenza $p = s-\frac{1}{2}$, $dp = ds$, ed adempiute le sostituzioni, e ponendo $\frac{31}{4} = g^2$ (12), scopriremo

$$\frac{s\,ds}{g^2+s^2} - \frac{\frac{1}{2}ds}{g^2+s^2} = -\frac{dy}{y},\ \text{o pure}$$

$$\frac{g^2\cdot 2s\,ds}{g^2+s^2} - \frac{g^2 ds}{g^2+s^2} = -2g^2\cdot\frac{dy}{y}.$$

Sanno gli Analisti essere $\int\frac{g^2 ds}{g^2+s^2}$ eguale ad un arco di cerchio, il cui raggio $g$, e la tangente $s$. Questa sommatoria io la segnerò così $\int\frac{g^2 ds}{g^2+s^2} = A^o R^o g\, T^o s$.

Integrando dunque ritroveremo

$$g^2 \log \overline{g^2+s^2} - A.R.g\,T^e s = 2g^2\log A - 2g^2\log y\ (13)$$

La costante aggiunta $A$ mi ingegnerò di determinarla ~~nel seguente~~ nel num.^o VIII.

VII. Abbiamo per la formola (6) $-dy = z\,dq$, e per la (9) $z = yp$; dunque $-\frac{dy}{y} = p\,dq$. Inoltre l'equazione (10) mi insegna essere

$$\frac{p\,dp}{\overline{p+\frac{1}{2}}^2+g^2} = -\frac{dy}{y},$$

e quindi si trova fatta la divisione per $p$, $\frac{dp}{g^2+\overline{p+\frac{1}{2}}^2} = dq$, o sia ponendo in cambio di $dp$, e di $p+\frac{1}{2}$ i loro valori $ds$, $s$; $\frac{ds}{g^2+s^2} = dq$. E giacchè $dq = \frac{dv}{v}$ (4), adempiuta la

sostituzione

sostituzione, ci si presenterà $\frac{\partial s}{g^2+s^2} = \frac{\partial v}{v}$,

e integrando $\frac{A^o R^o g\, T^e s}{g^2} = lv$ (14).

Non aggiungo costante, perchè è superflua.

VIII. Dall'ultima formola si deduce $A^o R^o g\, T^e s = g^2 lv$. Sostituisco un tal valore nella equazione (13) ed ho $g^2 l\overline{g^2+s^2} - g^2 lv = 2g^2 lA - 2g^2 ly$, e dividendo per $g^2$ ~~da cui si ricava~~ $l\overline{g^2+s^2} = 2lA + lv - 2ly$.

Se fatta $L = 1$, e $l1 = 0$, ne risulterebbe $l\overline{g^2+s^2} = l\left(\frac{A^2 v}{y^2}\right)$, e per conseguenza $g^2+s^2 = \frac{A^2 v}{y^2}$ (15). Presa nuovamente per mano l'equazione (14) $\frac{A^o R^o g\, T^e s}{g^2} = lv$, e posta $v = L = 1$, ed essendo $l1 = 0$, sarà parimente in tal caso $A^o R^o g\, T^e s = 0$, e perciò $s = 0$, eguagliandosi a nulla la tangente di un arco $= 0$, e quindi a $v = L = 1$ ci corrisponde $s = 0$. Osservo, che quando (Fig. 74) $v = L - x = AB = L = 1$, l'~~ordinata~~ $AD = 2y$ si trova eguale a $2c$, laonde in detta circostanza $y = c$. Nella formola (15) si faccia $s = 0$, $v = 1$, $y = c$, e scopriransi $g^2 = \frac{A^2}{g^2}$ e conseguentemente $A = cg$. Per la qual cosa ~~A ... di ciò~~ l'equazione (13) prenderà il seguente aspetto

$$g^2 l\overline{g^2+s^2} - A^o R^o g\, T^e s = 2g^2 lcg - 2g^2 ly,$$

o sia $2 \cdot \frac{1}{2} l\overline{g^2+s^2} + ly - lcg = \frac{A^o R^o g\, T^e s}{g^2}$

o pure $2l\left(\frac{y\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right) = \frac{A^o R^o g\, T^e s}{g^2}$ . + Scangiata + a capo ipotesi

ipotesi, e volendo che sia $\int L = 0$, assegnato ad $L$ qualunque valore, avremo
$n \int\left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right) = \frac{A^0 R^0 g T^e s}{g^2}$ (16), nella quale espressione posto l'omogeneo di comparazione $=0$, e perciò $s = 0$, $y = c$, si haverà come in fatti dee stare $\int L = 0$.

Problema III.

Costruire la curva delli ante[illegible]

Problema.

IX. La costruzione della nostra curva si ottiene col mezzo delle formole (14) (16). Avverti essere $\frac{A^0 R^0 g T^e s}{g^2} = A^0 R^0 \frac{1}{g} T^e \frac{s}{g^2}$, la cui secante si agguaglia ad $\frac{1}{g^2}\sqrt{g^2+s^2}$. Le equazioni adunque (14) (16) si ponno esprimere così:

$$\int v = A^0 R^0 \frac{1}{g} T^e \frac{s}{g^2} \quad (14)$$

$$n \int\left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right) = A^0 R^0 \frac{1}{g} T^e \frac{s}{g^2} \quad (16).$$

Assunto $TsR$ (fig. 235) si delinei colla sottosecante $= 2$ la Logistica $SsS$, a cui si accomodi l'ordinata $RS = L$. Si segui ad ottenere l'ordinata $BG = v$ eguale alla assissa $BG$ della fig. 7, e sarà $RB = \int v$. Combinando insieme le formole (14) (16) ne risulta $\int v = n \int\left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right)$ (17). Quindi divisa per metà nel punto $P$ la linea $RB = n \int\left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right)$, avremo $RP = \int\left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right)$, e per conseguenza l'ordinata $PQ = \frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}$. Taglio $RT = nc$, e condotta la diagonale $ST$,

rivo io essa parallela la linea QM. Essendo simili i triangoli SRT, QPM, si verifica l'analogia

$RS : RT :: PQ : PM$, o sia analiticamente

$$\alpha : nc :: \frac{\alpha y\sqrt{g^2+s^2}}{cg} : \frac{ny\sqrt{g^2+s^2}}{g},$$

la quale determina $PM = \frac{ny\sqrt{g^2+s^2}}{g}$.

X. Col raggio $GR = \frac{1}{g} = \frac{n}{\sqrt{31}}$ (12) (fig. 36) descrivasi il circolo RIKLR, ed al punto R si meni la tangente indefinita TC. Facciasi l'arco RB eguale all'ascissa $RB = fr$ della fig. 35, e per li punti G; B si conduca la retta GQ, che intersecherà la tangente TQ nel punto Q. Si segni GM = Gm eguale alla linea $PM = \frac{ny\sqrt{g^2+s^2}}{g}$ della fig. 35, e dai punti M, m si calino le normali MH, mh all'ascissa al diametro RR. Giacchè per la costruzione l'arco $RB = fr$, e per la formola (14) $fr = A^o.R^o.\frac{1}{g}.T^a\frac{s}{g^2}$, ne segue essere $RB = A^o.R^o.\frac{1}{g}.T^a\frac{s}{g^2}$. Ma essendo il raggio $GR = \frac{1}{g}$; dunque la tangente $RQ = \frac{s}{g^2}$. La secante GQ s'eguaglia a $\frac{1}{g^2}\sqrt{g^2+s^2}$. La similitudine dei triangoli GQR, GMH ne somministra l'analogia

$$GQ : GR :: GM : GH$$

$$\frac{1}{g^2}\sqrt{g^2+s^2} : \frac{1}{g} :: \frac{ny\sqrt{g^2+s^2}}{g} : ny,$$

da cui impariamo essere $GH = ny$: essendo

perfetta

perfetta egualità fra i triangoli GHM, Ghm, si scopre Gh = GH. La direzione opposta pertanto delle mentovate linee [illegible] dice, a Gh si deve assegnare il valore negativo $-ny$. Ora, per mezzo l'equazione (17) $lv = l\left(\frac{y\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right)$,

e passando dai logaritmi alle quantità comuni abbiamo $v = \frac{Ly^2 \cdot g^2+s^2}{c^2g^2}$ (18) equazione, da

cui si deduce, che a un dato valore di $v$ corrispondono due grandezze eguali di $y$ una positiva, e l'altra negativa.

Al punto G (fig. 24) conduco le ordinate GH, Gh eguali alle linee GH, Gh della fig. 9, ed i punti H, h, ed altri infiniti in simil guisa determinati appartengono alla curva, che abbiamo presa a costruire: il che [illegible]

Scolio I.

XI. Stimo opportuna cosa il fare alcune riflessioni intorno l'andamento, e le proprietà della nostra curva. Considero i soli valori GH = ny (fig. 23); inquantochè tutto quello, che di essi dirò, si può applicare alle eguali grandezze Gh colla sola differenza, che queste vanno segnate dalla parte opposta.

Se l'arco RB = $A^0 R^0 \frac{1}{g}$ [illegible] $\frac{s}{g^2} = 0$, abbiamo per ricavarlo dalla equazione (14) $lv = 0$ e per conseguenza $v = L$, essendosi supposto pure niente supposto $lL = 0$. Posto RB = 0 è parimente nulla la toccante $RC = \frac{s}{g^2}$, e perciò $s = 0$. Nella formola (18) si faccia $v = L$, $s = 0$, e si scoprirà $y = \pm c$. Quindi in tal caso GM = GH = XII

ny

$2y = 2c$, il qual valore si eguaglia nella Fig. 34 l'ordinata AD corrispondente all'ascissa $BA = v = \alpha$.

XII. Venivo gli archi KB (Fig. 36) crescano aritmeticamente, le linee t calano in ragione geometrica. Ciò dipende dall'indole della Logistica (Fig. 35), in riguardo a cui i predetti archi formano le ascisse KA, e le v le ordinate BG. Chiamo a il quadrante KBI (Fig. 36), e tagliate nella Fig. 35 le ascisse $K2K = a$, $K3K = 2a$, $K4K = 3a$, $K5K = 4a$ &c., le ordinate KS, 2K2S, 3K3S, 4K4S, 5K5S &c. comporranno una serie geometrica. Abbiamo già fatta la linea KS eguale a $BA = \alpha$ della Fig. 34. Si stabiliscano inoltre alle ordinate della Fig. 35 2K2S, 3K3S, 4K4S, 5K5S &c. eguali alle ascisse BC, B2A, B2C, B3A &c. della Fig. 34. Stando in progressione geometrica le mentovate ascisse costituiranno parimente una simile serie le loro differenze AC, C2A, 2A2C, 2C3A &c. Si riferiranno altresì in serie continue geometriche le BA, B2A, B3A &c., le differenze loro A2A, 2A3A &c.; le BC, B2C, B3C &c.; le differenze loro C2C, 2C3C &c.

XIII. Cresca gradatamente (Fig. 36) l'arco RB dal nulla al quadrante, ed accaderà, che la linea $GH = 2y$ scemi per doppio titolo, e perchè cala l'angolo GMH, cala per se stessa patente, e che non abbisogna di prova; e perchè cala la linea $GM = \frac{2y\sqrt{a^2+s^2}}{s}$, la quale si è fatta eguale alla DM

## Schediasma VIII.

DM della fig. 38. Essendosi segliata per mezzo la linea RB nel punto D, l'ordinata DQ è media proporzionale fra le due $RS = L$, $AG = v$, e quindi $DQ = \sqrt{Lv}$. Ripetuta l'analogia impropriamente usata al numero IX.

$$RS : ZT :: DQ : DM$$

$$L : 2c :: \sqrt{Lv} : \frac{2c\sqrt{v}}{\sqrt{L}}$$

scopriremo DM, o sia nella fig.ª 39. $GM = \frac{2c\sqrt{v}}{\sqrt{L}}$, formola che ci insegna, che il calare di $v$ la linea GM decresca: Ma all'aumentarsi degli archi RB scemano le $v$, dunque crescendo i detti archi cala la linea GM. Dalle cose dette deduci, che quando l'arco RB si agguaglia al quadrante RA, le due linee GM, HM coincidono, e la $GH = 2y$ diviene eguale a nulla: All'arco RB eguale al quadrante RA corrisponde nella fig. 34. $v = BC$ e però la curva DHC passerà pel punto C, e procedendo da A verso C le ordinate continuamente scemando, e diverranno nulle nel punto C.

XIV. Nel punto nominato la nostra curva ha un flesso contrario, in virtù del quale il ramo CA da C che come vedremo discende al di sotto dell'asse AB, volta allo stesso il concavo, come altresì lo volta il ramo DHC. Richiedono i flessi contrarj, che sia o $ddy = 0$, o $ddy = \infty$. Dalla equazione (3.) deduci la seguente $\pm \frac{4y\, dv^2}{v^2} = \mp ddy$, da cui apprendiamo, che posta $\pm y = 0$, è parimente $\mp ddy = 0$, e che per conseguenza ad $y = 0$ corrisponde il flesso contrario.

La fig. 39

XV. La fig. 39 patentemente dimostra, che mentre l'arco kB diviene maggiore del quadrante kI, perchè il punto B cade nel semicircolo IkL, la linea GH = ry comparisce in figura di negativa, passando il punto H nel senso di contrario GK. Se l'arco kB s'eguaglia al triplo quadrante kIKL in tal caso v = kaL (fig. 34). Quindi per tutto il tratto CaL le ordinate ry saranno negative, e la curva CadaL starà al di sotto dell'asse AB. Noto, che nel sito aL generalmente ry = 0, perchè il raggio GB (fig. 39) cade sopra il raggio GL, ed il punto H torna a coincidere col punto G, laonde GH = ry = 0. Nel mentovato sito aL (fig. 34) la curva ha un flesso contrario, per le ragioni poco fa allegate.

XVI. Ora mi faccia ad investigare il massimo valore della ordinata −ry in riguardo al pezzo di curva CadaL. L'equazione (14) si trasforma così: $\frac{c^2g^2}{L}\cdot\frac{v}{g^2+s^2} = y^2$. Se aumentando per una minima flussione l'arco kB (fig. 38), le due quantità $v$, $g^2+s^2$ decrescono proporzionalmente, non si altera il valore del quadrato $y^2$, e conseguentemente neppure quello del lato $\pm y$, per la qual cosa la differenza $\pm dy = 0$. Questa circostanza ci dà indizio, che l'ordinata $\pm ry$ è giunta alla massima sua grandezza. Essendo $dv$ la differenza di $v$, e $2s'ds'$ quella di $g^2+s^2$, avremo $\frac{dv}{v} = \frac{2s'ds'}{g^2+s^2}$. Ma per la formula (14) $\frac{dv}{v} = \frac{ds'}{g^2+s^2}$; dunque $2s' = 1$, ovvero $\frac{s'}{g^2} = \frac{1}{2g^2} = \frac{2}{3L}$, ponendo in cambio di $g^2$ il suo valore $\frac{3L}{4}$. Si tirerà la tangente $ka = \frac{s'}{g^2} = \frac{2}{3L}$, e condotta per i due punti a, G la retta aGN,

determinerà

determineranno: cioè l'arco R I N, a cui deverà tagliarsi eguale l'ascissa RN (fig. 35) della Logistica S S S. Si alzi l'ordinata NO = r, e fatta a questa eguale la linea B C (fig. 34), al punto C corrisponderà la massima ordinata C f, il valor della quale si stabilisce effettuando le operazioni dalla costruzione prescritte.

XVII. Continuando a crescere l'arco R B₁ (fig. 39), e divenendo maggiore de' tre quadranti R I K L, la linea GH = ny torna positiva, di modo che si genera nella fig. 34 il ramo 2 C 3 D 3 C. Anche in tal ramo ha le condizioni dell'altro già descritto C n d 2 C, imperocchè succede in 3 C un flesso contrario, e l'ordinata 2 C 2 d è favorita del massimo valore. Si trova il punto 2 C facendo l'ascissa della D 2 N della Logaritmica (fig. 35) eguale all'arco R I K L n (fig. 39), o tagliando B 2 C nella fig. 34 eguale alla ordinata 2 N 2 O nella fig. 35.

XVIII. In si fatta guisa proseguirà la curva (fig. 34) A C n d 2 C 3 D 3 C &c., la quale è una specie di anguinea, che taglia l'asse A B in punti infiniti C, 2 C, 3 C &c., in riguardo ai quali si verifica la proprietà superiormente notata al numero XII, che le linee distanze B C, B 2 C, B 3 C dal punto eccentrico B dell'onda formano una serie continua geometrica decrescente. La nostra curva ha un altro ramo d C n D 2 C 3 d 3 C &c. affatto simile ed eguale al mentovato, se non che va collocato a rovescio.

XVIIII. Se più archi R B (fig. 39) differiscono per un intero circolo, il che si avvera degli archi in esso, R I K, R I K L R &c., allora i triangoli G H M riescono simili, e le G H = ny serbano la proporzione delle

$GM = \frac{nc\sqrt{r}}{\sqrt{L}}$. Riescirà in tale

incontro

inoltre le ordinate della curva espressa nella fig. 34 stanno come le radici delle ascisse. Le ascisse corrispondenti alla serie degli assi ricavati in esempio sono BA, B2A, B3A &c. e quindi le ordinate AD, 2A2D, 3A3D &c. oppure le rispettivamente eguali Ad, 2A2d, 3A3d &c. si riguarderanno nella ragione di $\sqrt{BA} : \sqrt{B2A} : \sqrt{B3A}$ &c. ~~mentre AD, 2A2D, 3A3D &c. compongono una serie geometrica~~ Ma BA, B2A, B3A &c. compongono una serie geometrica, conforme ho avvertito al nº XII ~~...~~; dunque sarà pure geometrica la serie $\sqrt{BA}$, $\sqrt{B2A}$, $\sqrt{B3A}$, e per conseguenza le ordinate AD, 2A2D, 3A3D &c. prese saranno in geometrica progressione. Le massime ordinate CF, 2C2F &c. ovvero Cf, 2C2f &c. godono della medesima proprietà.

~~Scolio II~~

XIX. Sicché la curva delineata non serve alla proposta dall'esimio Sig. Zeri; si debbono scegliere quelle porzioni, nelle quali secondo ~~la ...~~ l'equazione (3.) $\frac{4y\,dv^2}{v^2} = -ddy$, o pure $-\frac{4y\,dv^2}{v^2} = ddy$ alle ordinate +y positive corrispondono le seconde flussioni ddy negative, e tutto al contrario alle ordinate −y negative corrispondono le seconde flussioni ddy positive. Si verifica ciò dei rami posti superiori, e parte inferiori all'asse AB che nella fig. 37. si veggon descritti D2C, 2D3C &c. Nei rami superiori DC ... ogni ordinata GH = +y che si considera deve come positiva, esprime quello spazio che ... dopo compiuta una

una vibrazione ha scorso per la direzione AB per la quale si suppone, che parimente abbia fatta una oscillazione il corpo sonoro.

Nei detti rami, che voltano il concavo verso l'asse AB, crescendo le ascisse $BG = v$, crescono ancora le ordinate $GH = ay$, ma con tal legge, che i loro elementi $ady$, o le metà $dy$ vanno sempre diventando più piccole, secondo=ché si aumentano le BG. Sono negative adunque le seconde differenze $ddy$, mentre le ordinate GH son positive.

+ a capo. + Segno a destra, ed a sinistra del punto G le due particole di ara GI, GK, la cui pari lunghezza s'eguagli all'elemento costante $dv$. Alzate dai punti I, G, K le ordinate IL, GH, KM, tiro LO, HN parallele all'asse BA. Dopo ché finita una vibrazione i punti I, G, K hanno passato gli spazj IL, GH, KM per la direzione AB, e sono ridotti in questo la particola GI si è costipata per la flussione maggiore OH, e la particola GK per la flussione minore NM. Quindi il punto … G è spinto da G verso A, e questa forza lo muove a tornar indietro, e a dar principio alla reciprocazione.

XXI. Qualunque ordinata $QT = -ay$ dei rami inferiori Cf, a Caf G fa figura di negativa denotando quello spazio, per cui si è mosso da B verso A il punto Q dopo … di avere terminata una oscillazione con direzione contraria a quella del corpo sonoro. Conciosiache che i nostri rami volgono il concavo all'asse AB, e crescendo le ascisse BQ, calano le ordinate QT, ma con differenze sempre maggiori; ne interviene, che alle dette ordinate negative corrispondono le $ddy$ positive.

+ a capo. + Taglio come sopra $QR = QP = dv$, descrivo le ordinate RV, QT, PS, e tiro poscia SZ, TX parallele all'asse AB. Abbiamo i punti P, Q, R scorsi gli spazj PS, QT, RV per la

per la direzione BA, e compiuta una
vibrazione, la particella DQ si troverà
più ravvicinata della QE, quando la
flessione ZT, per cui si restringe la prima
particola, maggiore della flessione XV,
per cui restringesi la seconda [illegible].
Perciò il punto Q verrà innalzato, e
ravvolgere da Q verso B.

XXII Applicando gli addotti discorsi (fig. 34) ai
rami inferiori dE, fra C e fβC ec.
come pure ai superiori Cγ, εCεδ ec.
agevolmente si scorgerebbe non potersi alli-
nearsi alla ipotesi del lodato Sig. Tayl.;
imperciocchè si verificherebbe il caso,
che le particole anche dopo terminata una
oscillazione seguitassero ancora colle istesse
e secondo della oscillazione medesima,
laonde dovrebbero continuare il moto,
mentre la supposizione richiede, che ab-
biano da tornare in dietro.

XXIII. Rivolgo dunque [illegible] alla fig. 33, ed osservo, che
per [illegible] motivo, coi rami superiori
δC, fra C ec. si levino [illegible] gli
inferiori, αCγ, ec. Dall' una
e dall' altra parte d'un punto immobile
e [illegible] di C si taglino Cd = Ca
e si richiamino le ordinate dζ, ab. Quando
nel sito C $ddy = 0$, come [illegible]
nel numero XXI. pareva una quantità ugua-
le [illegible] fra le ordinate [illegible]
delle quali si eguaglia [illegible] $ddy$. Finita
una vibrazione dal punto a per la
direzione AB, e dal punto d per la
direzione contraria BA, le particole
Ca, Cd restano del pari costipate per
gli elementi eguali ab, dζ, ed essendo
il punto C tolto in mezzo da forze eguali
rimane immobile, conforme la costruzione
richiede.

richiede [illegible] A, chi s'immaginasse di sostituire al [illegible] inferiore C f. il superiore C 2. (Fig. 3A.) si potrebbe suggerire la inflessione, che mentre la particola C a (Fig. 3A) si spinge per la linetta [illegible] l'altra particola C d si direbbe altrettanto, e venendo spinto il punto C da C verso B, sarebbe impossibile, che conservasse la quiete.

Resta pertanto fermamente stabilito, che i soli vani nella Fig. 3A delineati alla supposizione del Dottissimo Sig. Torri si adattano.

Scolio [illegible]

XXIIII. Ora egli è di mestieri considerare, se quei movimenti, che secondo delle potenze, di cui si tratta, dovrebbero animare le particole curve, possano loro realmente e puramente competere. Nella vibrazione del corpo sonoro scopro la ragione, per cui tutti i punti contenuti nella porzione di onda A C costrebbero da muovere per la stessa direzione da A verso B. Rimanendo pertanto immobile il punto C, io non giungo a capire da qual meccanismo possa procedere, che tutti i punti fra C ed E ricevano al contrario per la direzione B A. Di più l'aria A C in cambio di mandare [illegible] l'urto dell'aria C C, tutta [illegible] verso si ribatterebbe da A verso B, incontrandosi il fisico assurdo, che due particelle di aria situate [illegible] e l'una all'altra vicine prima della oscillazione, si troverebbero separate finita la vibrazione [illegible] per la distanza f 2. Chi mi sa insegnare quella molla, che [illegible] incontrati due punti aerei, immediatamente dopo che sono divenuti, [illegible] 2 Gli stessi [illegible] notati nella porzione C a C dell'onda A B, si riscontrano nelle parti dell'onda [illegible] 3 C, 3 C 4 C di qualunque numero, e in progressione geometrica decrescenti.

XXVI. Si vuole inoltre osservare, che le particole di aria contenute nell'onda AB ricevano dal corpo sonoro la forza viva acquistata nell'oscillare. Ora non sarebbe egli un [illegible] paradosso, se si riuscisse di provare che la forza viva delle mentovate particole e delle altre [illegible] superi quella del corpo sonoro? Una minima particella di una corda di metallo, che si vibra, genera moto in innumerabili raggi sonori, che hanno per centro la detta particola, fra i quali [illegible] il raggio AB. La particella di aria A tocchi la corda, e secondi [illegible] il suo movimento; di modo che e l'una, e l'altra oscillino con pari celerità. Vibrandosi le particole [illegible] A, G colle leggi dei pendoli [illegible], le loro velocità in punti analoghi, per esempio alla metà delle oscillazioni, hanno la ragione composta, diretta degli spazj AD, GH, che scorrono oscillando, ed inversa dei tempi, che impiegano in una vibrazione; i quali tempi serbano la ragione di BA : BG, come ho [illegible] al num.o III. ho [illegible] Il punto G [illegible] (Fig. 34) XVIII BA, BG [illegible], e per [illegible] AD : GH :: $\sqrt{BA} : \sqrt{BG}$. Le velocità adunque delle particole A, G abbraccieranno la proporzione $\frac{\sqrt{BA}}{BA} : \frac{\sqrt{BG}}{BG}$ o sia [illegible] equivalente $\frac{1}{\sqrt{BA}} : \frac{1}{\sqrt{BG}}$ e perciò i loro quadrati staranno inversamente come BA : BG. La particola della corda si divida in tanto numero N di parti eguali, [illegible] i raggi sonori dal movimento di una particola [illegible] nelle [illegible] facendo che BA : BG abbia o eguale o maggior ragione di quella, che passa fra la parte $\frac{1}{N}$

$\frac{1}{N}$ della massa della particola di metallo, e la massa della particola di aria G, si determinerà il sito G conveniente una particella di aria, la cui forza viva è uguale o maggiore di quella della porzione $\frac{1}{N}$ della nominata particola della corda. Alla forza viva della particola G si aggiungano ancor le forze vive, di cui nello stesso istante sono fornite tutte l'altre particole contenute nell' onda A B, e ne risulterà un aggregato di forze vive [illegible], che moltissimo supererà quella della parte $\frac{1}{N}$ della particola di metallo.

Finalmente le forze vive di tutti i raggi sonori, il cui numero N, destati nella aria dal tante volte nominato elemento della corda s'uniscano in una somma, e si scoprirà essere questa assaissimo più grande della forza viva del predetto elemento: quello che si è detto di una particola della corda, si applichi a tutte l'altre, e si concluda, che nella ipotesi [illegible] l'effetto supererebbe di gran lunga la propria cagione.

a capo + Avverto, che la supposizione [illegible] potrebbe ammettersi nel [illegible], che la forza viva trasfusa nell'aria da una vibrazione della corda pareggiasse quella della corda medesima. [illegible], che una corda sonora fa numerosissime oscillazioni prima di ridursi alla quiete, dobbiamo concluderne che [illegible] di una tale vibrazione passa nell' aria pochissima forza viva.

XXVI. Un facilissimo esperimento ci illumina, che le corde sonore non possono vibrarsi conforme la supposizione del celebre [illegible] (fig. 30) [illegible] questa ricorrenza vera, la particola G spenderebbe a vibrarsi un tempo tanto più piccolo, quanto fosse più vicina al punto estremo B dell' onda A B. Quindi ogni particola renderebbe un suono diverso, il quale si udirebbe sempre più acuto successivamente che l'orecchio s'accostasse al fine dell' onde: ma in qualunque sito G

sentito

scelto ad arbitrio io noto la stessa ancora unisono a quello del corpo sonoro; dunque le oscillazioni dell'onda AB non si conformano alle ipotesi dei Sig.ri Fisici.

Scolio.

XXVII Conchiudo il presente esame colla riflessione, che il moto non potrebbe passare da un'onda all'altra, ma nella sola onda prima AB sarebbe ristretto a formarsi. Con qual legge di continuità si può far passaggio dalla quiete del punto B al movimento per lo spazio eguale ad AD del punto immediatamente vicino, col quale principia l'onda seguente: dal tempo nullo, che il punto B spende a vibrarsi, al tempo finito, che ci impiega il punto contiguo?

Il notato aggregato di inconvenienti cancella, siccome io penso, le ipotesi per me enunciata dal libro della Natura.

2067

[illegible]

Tav. I.

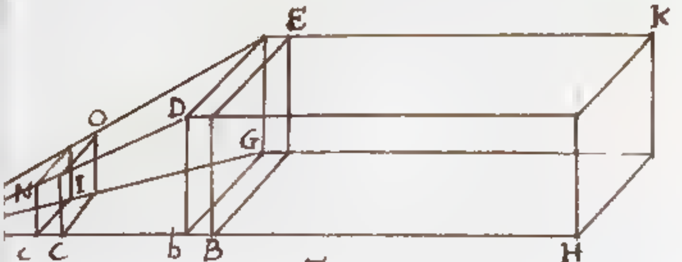



Fig. 4.

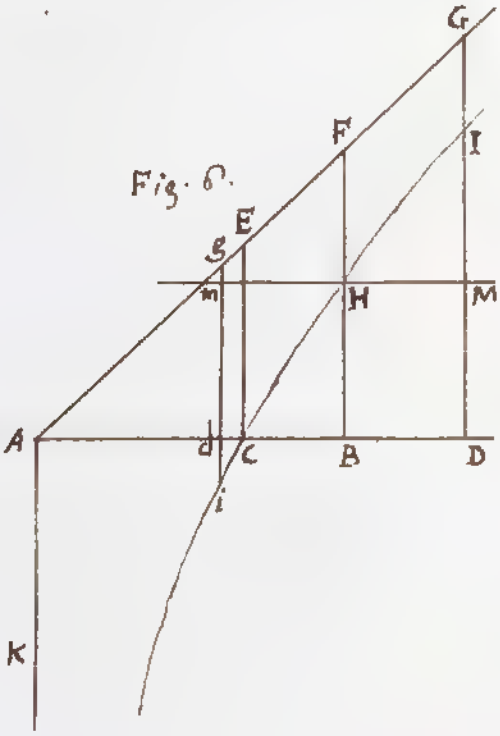



Fig. 6.

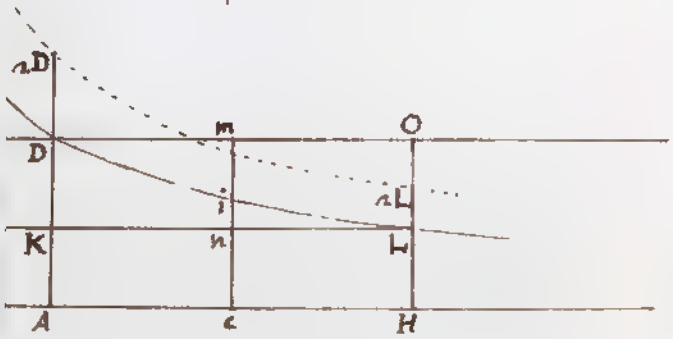



Fig. 8.

Fig. 10.

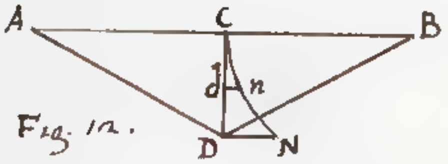



Fig. 12.

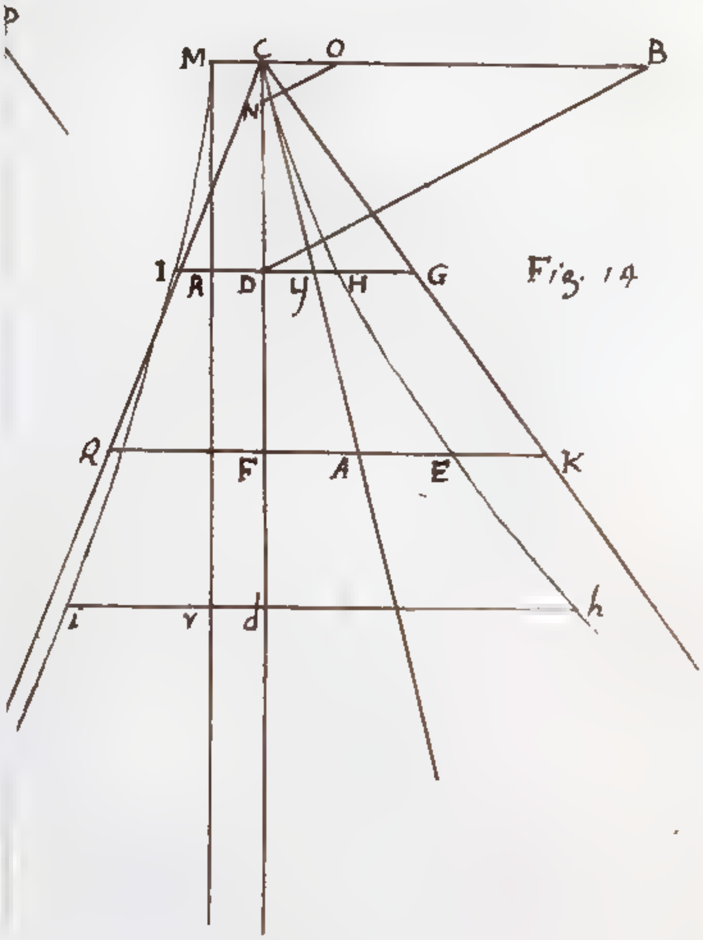



Fig. 14

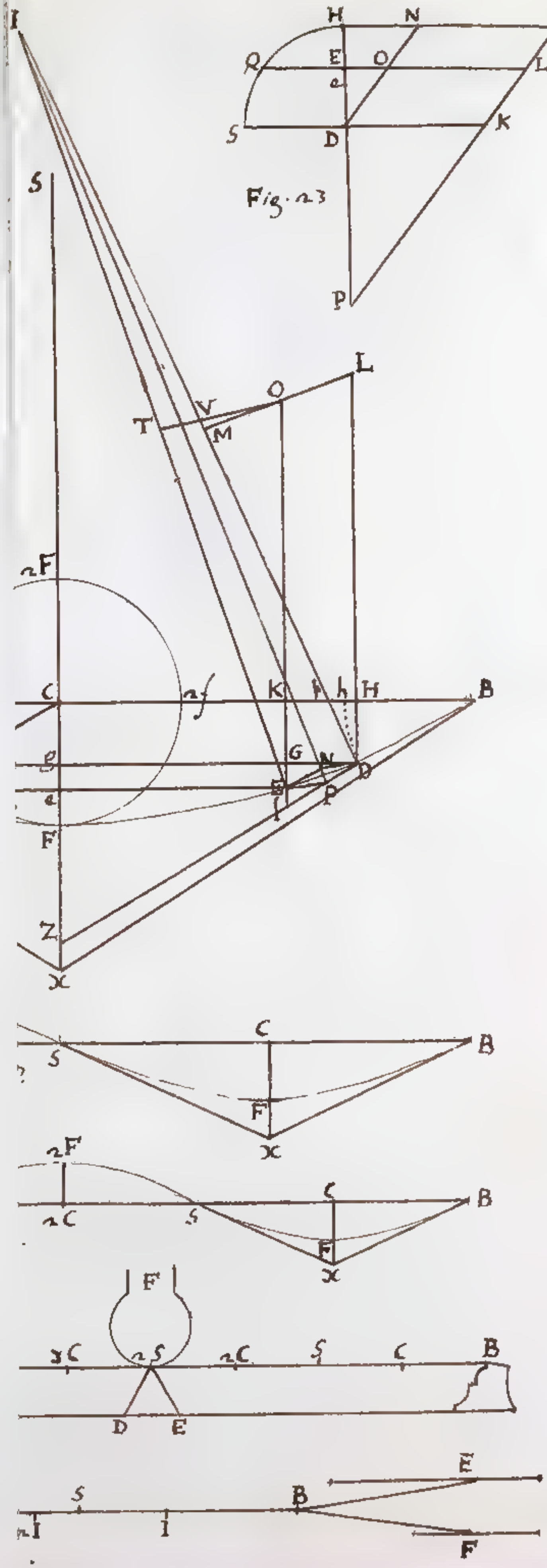


Fig. 23

Fig. 25.

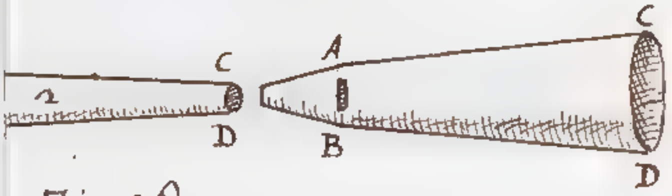
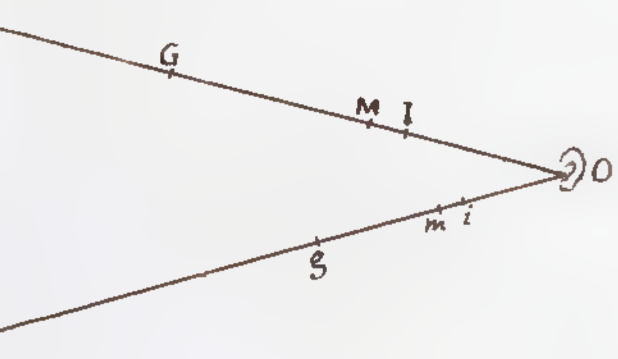



Fig. 26.




27.

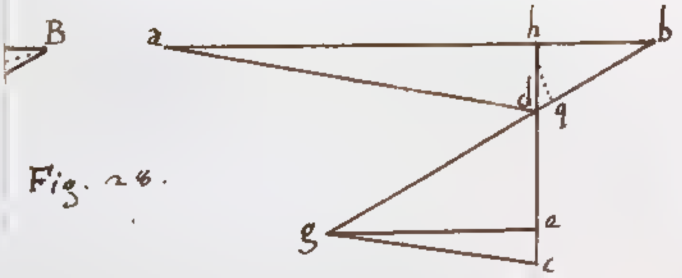
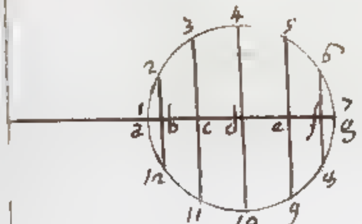



Fig. 28.

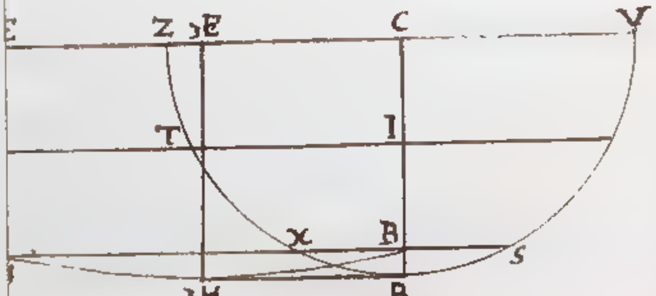



g. 29

ig. 30.

g 31

ig. 32




. 33.

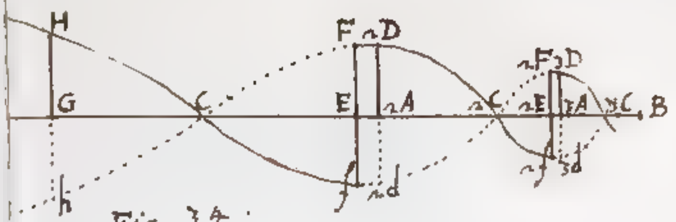
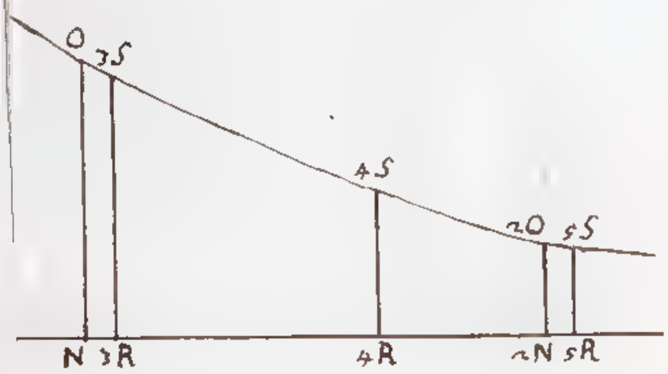

H
G
C
F
2D
E
2A
2C
2F
3D
2E
3A
3C
B
h
f
2d
2f
3d

Fig. 34.


O
3S
4S
2O
5S
N
3R
4R
2N
5R

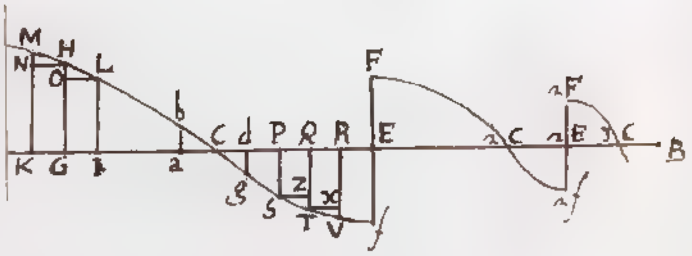

M
H
L
N
O
F
2F
b
C
d
P
Q
R
E
2C
2E
3C
B
K
G
a
g
S
Z
X
T
V
f
2f

Fig. 37.